数学という名の自由の翼

第16回　2015年7月

おいらが見つけた定理

1　オイラーのϕ関数

今年の一橋大学の入試問題に、次のような問題が出題されました。

> n を2以上の整数とする。n 以下の正の整数のうち、n との最大公約数が1となるものの個数を$E(n)$ で表す。たとえば、
> $E(2)=1\,,E(3)=2\,,E(4)=2\,,\cdots,E(10)=4$
> である。
> ⑴　$E(1024)$ を求めよ。
> ⑵　$E(2015)$ を求めよ。　　（⑶は省略）

今回はこの問題にちなんだ話をしたいと思います。高校の数学Ⅰ「集合と命題」の分野では、教科書に次のような定番問題が見られます。

【問題１】

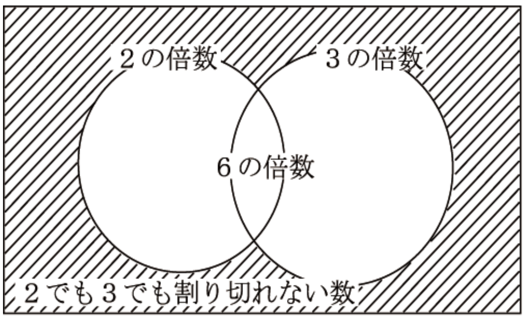
> 100以下の自然数で２でも３でも割り切れない数は何個あるか

普通は、次のように解いていきますね。

２の倍数・・・50個（100÷2＝50だから）

３の倍数・・・33個（100÷3＝33･･･１だから）

６の倍数・・・16個（100÷6＝16･･･4だから）



求めるのは、下図の斜線部分の要素の個数なので、

100−50−33＋16＝33個

この式を言葉で表現すると、「100から２の倍数と３の倍数の個数を引く。そうすると、６の倍数が２回引かれたことになるので、その６の倍数の個数を加える」ということになります。

私は、いつも、この問題を解いた後、次のように数字を変えた問題を提示することにしています。

【問題１’】

> 72以下の自然数で２でも３でも割り切れない数は何個あるか

数字を変えただけですが72は２と３のベキによって、$2^3\times3^2$ と素因数分解できるので、この問題は「72以下で72と互いに素である自然数の個数を求めよ」という問題に言い換えることができますね。

「72と互いに素」とは、「72との最大公約数が１となるものの個数」すなわち、一橋大の問題でいうところの$E(72)$ ということになりますね。

どうでしょう、ほんのちょっとしたことですが、このように考えると、少しカッコいい問題に見えてきますね。では解いてみましょう、

２の倍数・・・72/2＝36個

３の倍数・・・72/3＝24個

６の倍数・・・72/6＝12個

つまり、問題１と同様に考えて

72−36−24＋12＝24個

と求められるのですが、これを、計算式のまま書いてみると、次のように表現されます。

$$72-\frac{72}{2}-\frac{72}{3}+\frac{72}{6}=72\left\{1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\right\}\quad ※$$

ここで、上の式から、２次方程式の解と係数の関係を想起すると、

※$=72\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)$ という綺麗な式になります。

一般に n が、素数p , q だけで素因数分解できるとき、今のような方法で、n 以下でn と互いに素であるような自然数は、

$n\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)$ とまとめることができます。

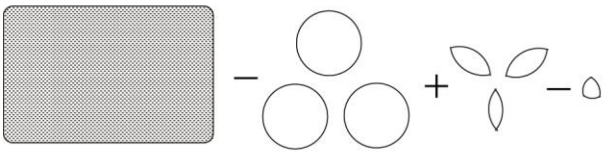
では、今度は、n が、素数p , q , r だけで素因数分解できるときはどうすればよいでしょう。

同じように考えてみましょう。

まず、n から、p , q , r の倍数の個数 $\frac{n}{p}$, $\frac{n}{q}$, $\frac{n}{r}$ を引きます。すると、pq , qr , rp の倍数が２回ずつ引かれてしまったので、それらの個数$\frac{n}{pq}$, $\frac{n}{qr}$, $\frac{n}{rp}$ を加えます。ところが、そうすると pqr の倍数が 1 個多くたされてしまったので、その倍数の個数である、

$\frac{n}{pqr}$ を引きます。

ベン図でイメージするとこんな感じですね。



これを式で表してみましょう。

$$n-\frac{n}{p}-\frac{n}{q}-\frac{n}{r}+\frac{n}{pq}+\frac{n}{qr}+\frac{n}{rp}$$

$$=n\left\{1-\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right)+\left(\frac{1}{pq}+\frac{1}{qr}+\frac{1}{rp}\right)-\frac{1}{pqr}\right\} \quad ※$$

ここで、やはり、３次方程式の解と係数の関係を想起すると、※$=n\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(1-\frac{1}{r}\right)$

綺麗な式になりますね。

私は、この手法を「引き過ぎ、足し過ぎ論法」と勝手に名付けていて、もう30 年近く前に、一般に $n={p_1}^{\alpha_1}{p_2}^{\alpha_2}\cdots{p_m}^{\alpha_m}$ と素因数分解できる場合、n 以下でn と互いに素である自然数の個数が、

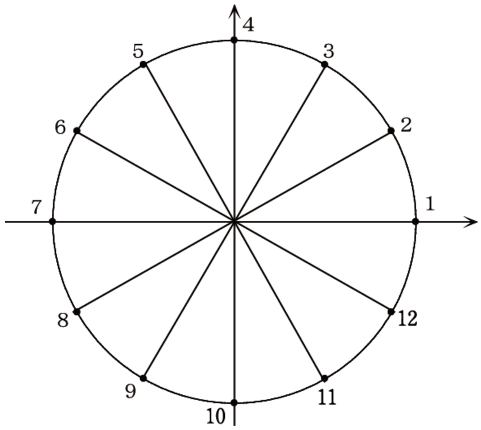
$n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_m}\right)$ と表せることを発見し、「おいらが発見した！」と狂喜して触れまわっていたら、実は、その 200 年以上前に、スイスの数学者オイラーさんが発見しておりました！(^^;

では皆さん、一橋大の問題を解いてみて下さい。

オイラーの発見したこの式は、大学で学ぶ内容ではありますが、こうして考えると、中高生でも（もしかしたら小学生も）親しめるものではないかと思います。

２　音列を作る

図のように、円周上に1～12 と割り振られた、12 個の点があります。



今、出発地点を1にして、いくつかおきに点を辿り、ふりだしに戻るまで進めて、数列を作っていくことにします。例えば、３つおきに辿ると、

1 →4→ 7→ 10　と進んで再び1に戻りますね。

いくつかおきにとる数（公差）を、1から12 までにしたとき、どんな数列ができるかを調べてみましょう。$n=12$ なので、数え上げればよいだけですが、12 以下で 12 と互いに素（最大公約数が 1）である数の個数は、$12\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)=4$ 個。

12 以下で 12 と最大公約数が２であるような数の個数は、６と互いに素になる数の個数を求めればよいので、$\frac{12}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)=2$ 個 となりますね。

では、一覧表を作ってみましょう。

公差	数列	周期
1	1→2→3→4→5→6→7→8→9→10→11→12	12
2	1→3→5→7→9→11	6
3	1→4→7→10	4
4	1→5→9	3
5	1→6→11→4→9→2→7→12→5→10→3→8	12
6	1→7	2
7	1→8→3→10→5→12→7→2→9→4→11→6	12
8	1→9→5	3
9	1→10→7→4	4
10	1→11→9→7→5→3	6
11	1→12→11→10→9→8→7→6→5→4→3→2	12
12	1	1

12 と互いに素である公差（1,5,7,11）のとき、1から12までのすべての数を1回ずつ辿っていることがわかります。数列の周期は、最大公約数で 12 を割ったものになっていることも表から見えますね。

実は、これらの 12 個の数列は、$x^{12}=1$ の根に対応しています。例えば、周期が 6 の数列は 2 個ありますが、これは、6乗して初めて1になるような根（原始6乗根）と対応していて、その最小多項式は

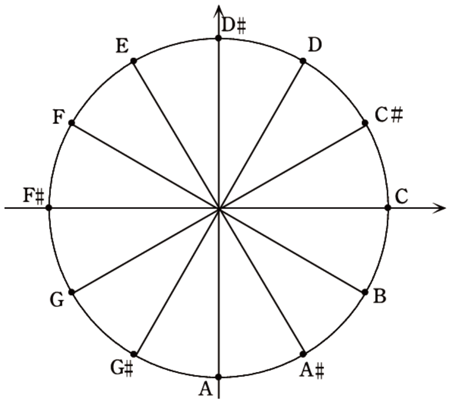
x^2-x+1 です。上にあげた数列と、$x^{12}=1$ の原始根の対応を表にしてみましょう。

gcd	周期	個数	最小多項式	根
1	12	4	x^4-x^2+1	$\frac{\pm\sqrt{3}\pm i}{2}$
2	6	2	x^2-x+1	$\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$
3	4	2	x^2+1	$\pm i$
4	3	2	x^2+x+1	$\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$
6	2	1	$x+1$	-1
12	1	1	$x-1$	1

（gcd：最大公約数　複号は任意）

オイラーのϕ関数を使えば、$x^n=1$ の原始根を容易に分類することができるわけですね。

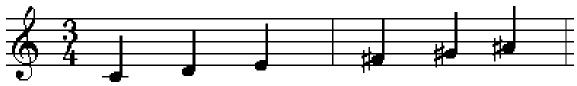
話しが難しくなってしまいすみません。ここで、円に振られた 1～12 の数字のかわりに、12 音階を対応させてみましょう。



●公差１の音階（半音音階（chromatic scale））

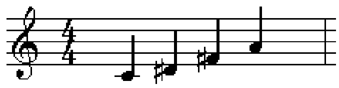
半音ずつ上昇・下降していく音階です。

●公差２の音階（全音音階（whole tone scale））



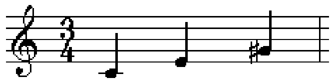
ジャズではブレイクやブリッジのときなど、調性が一時失われるときによく用いられます。

●公差３の音階（減音音階（diminished scale））



これは、Cdim7 コードの分散音になっています。ちょっと不安な印象を与える疑終止や、経過コードや代理コードに用いられます。

●公差４の音階（増三和音（augmented triad））



これは、ルートに長 3 度と増 5 度を加えたものになっています。不安定な和音なので疑終止や経過コードに用いられます。

一橋大の入試問題から、オイラーのϕ関数と最大公約数の話になり、更に、高度な円分方程式の話や、音楽理論の話にも広がっていきました。そういう意味で、数学とは、小中高大の校種や、教科の垣根を超えて繋がる「自由の翼」なのだと思います。