数学という名の自由の翼

第15回　2015年6月

微分に市民権を再び！

1　若き教師からのメール

前回は、微分とは何かというテーマで、ある悩めるお父さんとのメールのやりとりを紹介しました。

実は、今から3年ほど前ですが、ある若い教師から、やはり微分の意味に関してメールをいただいたことを、前回の原稿を書きながら思い出しました。

それは、こんなメールでした。

> 本校の前期中間考査で、「『微分する」を説明しなさい」という問題を出題したところ、
>
> ①「関数を導関数にすること」
>
> ②「関数をもとに、導関数に変換すること」
>
> という解答がでてきました。
>
> ○○先生と話し合いをしていたのですが、是が非か判断できませんでした。この点に関して教えていただけたらありがたいです。(2012/06/21)

二番煎じ的になりますが、以下に私の返信を紹介したいと思います。

私の返信

メールありがとうございます。まず、定期考査に「『微分する』を説明しなさい」という問題を出題したことに、先生方の志の高さを感じます。

私は、おそらく、用語の説明を通して、微分についての「概念」が理解されているかを評価しようということなのだと解釈しました。

私は、ある概念の「知識・理解」を評価することとは、単に、教科書の字面を追いかけて定義を暗記するのではなく、それがどのように応用されるか、その良さはどこにあるのか、など、活用的側面や、「数学的な見方考え方」に結びつくような概念の理解をみることが必要であると思います。

であるなら、例えば「微分する」を「導関数を求めること」とするのは、わからない用語を、別のわからない用語によって説明することになり、間違ってはいないけれど、解答としてはあまりいただけません（つまり、そのような解答では、微分の概念がわかっているかを測定することはできない)。

では「導関数」とは何か。これを「接線の傾きを導く関数」の省略形とイメージしてみましょう。

私は、「接線の傾き」という表現が「微分」を知識として理解しているかどうかを知るキーワードではないかと思います。

微分とは「微細に分ける」つまり、曲がりくねった曲線も微小の世界に入ることによって直線と見立てて考えることで、グラフの特性を知ることであったり、現在の状況から将来の状態を予測するための瞬間の伸び率を調べることだったり・・・そういうことを、授業の中で示すことが概念を定着させる上で大切ではないかと思います。

そのような中で、テストのための知識から、活用される知識となるとも思うのです。

そこで、解答例としては、「『微分する』とは、関数で表される曲線の接線の傾き（変化率）をいつでも導くことのできる関数（導関数）を求めること」などという感じになるのではないかと思います。

さて、肝心の生徒の答案

①「関数を導関数にすること」

②「関数をもとに、導関数に変換すること」

ですが、やはり導関数の意味が述べられていないことが私には不満です。出題が「『微分する』という言

葉を、導関数の意味を述べつつ説明せよ」という形式であればよかったかもしれませんね。

ただ、②の解答にはなるほどと唸りました。導関数には、関数空間から関数空間への線形作用素という意味合いもあります。

つまり、D(f+g)=D(f)+D(g) , D(kf)=kD(f)

という線形性と

D(fg)=D(f)g+fD(g)（ライプニッツ条件）

という法則を満たす関数への写像Ｄというのが「微分オペレーター」というわけです。

「微分する」という行為において、そこでは、意味を捨てて、関数を別の関数に変換するということもあるわけですから②の解答をした生徒には褒めてあげたいとも思います。

「微分とは、導関数という別の関数をつくる操作だ。でも、そのつくられる導関数がどのような意味を持つのかをとらえてこそ、微分とは何かがわかる」というように説明したいところです。今後、観点別評価を考えていかなければならない中で、とてもいい話題をいただきました。ありがとうございます。

すると、その教師から返信のメールが来ました。

たいへん丁寧に教えていただき感謝しております。

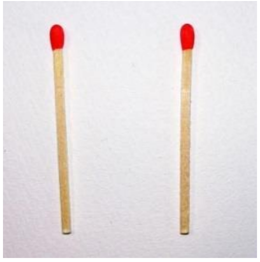
教科書では、「導関数を求めること」とあったので言葉調べをしてきたかどうかを見るつもりで出題しました。先生のおっしゃるところまで考えていなかった自分に反省しております。

用語や式の内面を伝えられるようにもっと勉強したいと思います。学習指導案と資料もいただき、ありがとうございました。

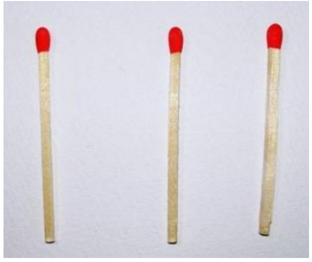
なあんだ。「導関数を求めること」とすべきところを、「関数を導関数にすること」としたことについての是非だったのですね。どうやら私は思いっきり深読みしていたというわけでした（笑）。

２　関数の値と変化率を合せて考えよう

なぜかマッチ棒の写真を撮ってみました。



写真①



写真②

写真③

写真④

上の４枚の写真について論じてみましょう。

取りあえず、マッチ棒の本数に注目すると、写真①から④の順に、２本、３本、44本、45本となっています。それだけの話ですね。

ところが、この写真を「刻々と本数が変化するマッチ棒」のあるシーンを撮ったものと考えると、面白い見方ができます。

写真①→写真②　では、１本の増加。

写真③→写真④　でも、１本の増加。

どちらも、変化量は同じ１本ですね。でも、写真①から写真②は変化の様子がはっきりと知覚できるのに、③から④の場合は、一見同じ写真に見えます。変化したような気がしませんね。

本数のみに注目するのは、関数で言うと「関数の値」を評価したということでしょう。そして、変化の様子に注目するのは、関数で言うと「導関数」を考えたということになると思います。いわば微分のイメージですね。

さて、なぜ、写真①から写真②の場合の本数の変化ははっきりとわかるのに、写真③から写真④の場合はできないのでしょうか。どうやら、人間の知覚や感覚は、与える刺激の量と関係がありそうです。

マッチ棒の本数を「刺激 x 」、それに対応して決

定される人間の「感覚の量」を $y=f(x)$ と x の関数として考えてみましょう。

すると、「感覚の変化量は、刺激の量が大きい時に鈍る」つまり、「感覚の変化量は刺激の量に反比例する」という仮説を立ててみます。

これを立式すると

$\frac{dy}{dx}=\frac{k}{x}$ という微分方程式で表せるので、これを

解くと、$dy=\frac{k}{x}dx$ から、$y=k\log x+C$

つまり、人間の感覚は刺激の対数関数になっているということが推測されますね。

大学時代、激辛カレーにハマったことがありました。ある店では、1～8倍という、8段階の辛さのカレーが用意してありました。私は１倍から始まって、8倍まで食べました。このときの印象ですが、倍数が1，2，3・・・と増加するにつれ、それに対する辛～いという感覚は、１次関数的ではなかったということです。１倍→2倍や、2倍→3倍、のときは、「急に辛くなった」と思うのですが、6倍→7倍や、7倍→8倍になると、香辛料の差は同じなのに、そんなに急に辛くなったとは思わなかったのです。ときには、どちらもあまり変わらないという印象さえ抱いたものです。強い刺激に人間の能力が追いつかなかったのですね。

これが世にいう「フェフィナー・ウェーバーの法則」です。

話しは変わりますが、昔、ある予備校の先生が、生徒への進路講演会でこんなことをいっていました。

「現役高校生は受験当日の朝まで伸びる。ただしその伸び率は、それまでの蓄積量に比例する」

この話を聞いたとき、ああこれは微分の話として使えそうだなと思いました。蓄積量を時間の関数と見て、x 時間後の蓄積量を y とします。伸び率は蓄積量の変化量なので y' と考えることができるので、「伸び率はそれまでの蓄積量に比例する」という言葉を式にすると、

$y'=ky$ という微分方程式になります。

$\frac{dy}{dx}=ky$ として解いてみると

$\frac{1}{y}dy=kdx$ から、$\log y=kx+C'$

よって、$y=Ce^{kx}$

つまり、勉強すれば、指数関数的に伸びる！
（うっそくせー！）

まあ、これは冗談話として置いておくとしても、私たちは、数学で扱う関数だけに限らず、一般に、変化する物事について論じる際、「現在の状態」（関数の値）と、「変化する様子」（微分）の両面から判断する必要があるのではないかと思います。

更にそこから転じると、微分の話からは脱線しますが、物事には「外側から観察・測定できる量」だけでなく、「内包されている見えない量」も併せて観ることが大切であるという見識にも繋がるのではないかと思います。

身近な例をあげると、子どもの成績の評価はどうでしょう。例えば期末テストの点数は、その時点での「関数の値」です。でも、ペーパーテストの点数だけで、能力を決めつけるのではなく、彼が内包している見えない能力のようなものも見る必要があります。例えば、「点数は低かったけれど、意欲満々なので、将来はきっと伸びる要素がある」と評価することもあるだろうし、「点数は良かったけれど、生徒たちは授業をあまり楽しそうにしていない。少し授業を見直した方がいいかも」と自身の授業評価を行うことにつながったりするかもしれません。

最近、観点別評価の話の中で、知識や技能だけでなく、意欲なども評価せよと言われていますが、これを私的に言うと、「生徒は関数の値だけでなく、導関数も評価しよう」ということになります。

このような言い方を許すと、「微分」「導関数」などというタームは、「伸び率」だけでなく、「見えない能力」「潜在的なパワー」などを表現するものとして「ベクトル」のように日常的に使えるかもしれませんね。では皆さん声高らかにご唱和ください。

「微分に市民権を！」