数学という名の自由の翼

第14回 2015年5月

微分に市民権を！

1　微分に市民権を！

最近、「ベクトル」という数学用語が数学以外の会話の中で耳にすることが多いですね。

例えば、「考えるベクトルを同じにして頑張ろう」などと。恐らく、ここで用いられる「ベクトル」とは、単なる「方向」という意味なのかもしれませんが、こうも頻繁に耳にすると、数学を扱う者の端くれとしては見過ごせません！　＼(`o´)／

「考えるベクトルを同じに」ということは、考える方向だけでなく、考える「大きさ」も同じにするということ？では考える大きさとはなんだろう・・・

「考える」ことがベクトルならば、それは和と実数倍という演算が定義された世界だよね？だとすればそれはどういう意味なのだろう・・・

まあ、いわゆるひとつの屁理屈なのですが。

でも、「ベクトル」という言葉は、それが必ずしも数学で定義される概念と合致しているとは限らないものの、日常の中で市民権を得たタームとして、ある意味社会の中で定着しているといえます。

ところが、微積分については、言葉自体は社会の中で広く認知されているにもかかわらず、その意味や概念はきちんと理解されているとは言い難いですね。むしろ「難しくて嫌なもの」の代名詞として使われることが多いと感じます。

例えば、「そんな微分積分みたいなわからんことを言わないで」とかなんとか。

余談ですが、昔、ある学習塾を紹介するテレビ番組を見たことがあります。

「驚くべき〇〇塾の教育！」として、小学校低学年で、既に微積分をマスターしているとのふれこみでした。

そして、その画面に映った映像では、小学生達が、ノートに向かって、

$x^2 \to 2x$

$x^3 \to 3x^2$

$x^4 \to 4x^3$

・・・・・・・・

と、真剣に、延々と書き記していく姿だった！

つまり、これをもって、この小学生達を「微分がわかる！」としていたわけです。（ため息）

おっといけねえ。そんな話を思い出して疲れはてる前に本題に入りましょう。

「数学とは何か」という問いの答えの一つとして、「数学とは自然現象を支配する物理法則を調べる道具である」と述べることができます。そして、それを読み解く武器として微積分が果たす役割は非常に大きいものがあります。であるならば、我々は、もっとポジティブに日常の中で「微分」を語るべきであると思います。

そのためにも、私達教師が、微積分の意味、微分法の誕生の歴史や、その概念の背景に潜むダイナミズムを示すことで、生徒に微積分の面白さや良さを伝えていくことが求められるのではないでしょうか。

2　悩めるお父さんとのメール交換

以前、ある生徒からこんなメールが届きました。当人から許諾を得て、その一部と私の返信メールを以下に紹介します。

＜生徒からのメール＞

父が「微分の意味が分からない」と言うのです。私も理解させようと説明を試みましたが、さっぱり分からないようです。そんな父に、微積分についてメールで教えてやって頂けないでしょうか？父たっての希望です。よろしくお願いします!ちなみに父は、高校時代、微積分が 0 点だったそうです。(教師が嫌いだったそうで、授業を全く聞いていなかったらしい)今になって後悔しているようです。

＜私の返信＞

微分を考えるためには、まず関数を定義しなければなりません。

関数とは、おおざっぱにいうと「ともなって変わる２つの量x, y」があったとき、xからyへの対応の規則のことです。例えば、自動車を運転するとき「移動距離y」は「時間x」の関数と考えることができます。

今、車を２時間運転して、120km ほど移動したとします。すると、平均して時速 60km の速度で運転したことになります。この平均速度のように、xの増加分に対するyの増加分を数学の言葉では「平均変化率」といいます。

ところで、確かに平均すれば時速 60km ではあるけれど、実際は、100ｋm/h で飛ばしている時もあったかもしれないし、または止まっている時もあったかもしれません。

私たちが知りたいのは「ある瞬間の速度」です。「瞬間の変化率」を考えようということから「微分」という手法が生まれました。

この「ある時間tにおける瞬間の変化率」のことを「tにおける微分係数」といい$f'(t)$とかきます。「微分する」ということは、ある瞬間における変化率をいつでも導くことができる関数（導関数といいます）を求めることです。

導関数は　$f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ という式で定義されます。ここで分母はxの増加分のことで、分子はそれに対する$y = f(x)$の増加分のことです。lim は極限を表す記号で、h を、「0 と異なる値をとりながら限りなく0に近づける」ということを意味します。

17 世紀にニュートンやライプニッツによって構築された「微分」とは、「極限」という考えを用いることで生み出された新しい数学でした。

最近「微分係数」を説明する面白い例を考えました。プロ野球のジャイアンツの上原投手と、日本ハムファイターズのダルビッシュ投手が大リーグに行くとします（㊟1）。さて、どちらの投手が高い評価を受けるでしょうか。投手としての実績を数字としてみると、登板数、勝利数、奪三振数、完投数いずれも上原の方が上です。それをもって上原の方がダルビッシュより高い評価を受けるというのは、関数でいうと「関数の値を評価した」ということになるでしょう。しかし、多分評価はダルビッシュの方が上だという人も多いでしょう。それは「現時点における将来への可能性」が上原より高いという考え方からくると思います。現時点での伸び率の比較というのはまさに「微分係数の比較」（=現時点での伸びる勢いの比較）による評価ということです。

「君はお金持ちでうらやましいな」といったとき「でも微分係数が負なんだよ」と切り返されたら、それは「今はお金持ち（関数の値は大きい）だけれど、下向きに下降中（伸び率つまり微分係数がマイナス）なんだ」ということをいっているわけですね。

最後に、微分係数とグラフの考えについて触れたいと思います。関数$y = f(x)$の変化の様子を見るためには「グラフ」を描くということを行います。関数にはそのグラフがセットになっているといってもいいでしょう。

さて、では微分係数はグラフではどのようなものを表すでしょうか。先ほど「平均変化率」の説明をしましたが、平均変化率は、xの増加分に対するyの増加分なので、これはグラフ上の２点を結ぶ直線の傾きを表します。

微分係数は、そのxの増加分を限りなく0に近づ

けたものなので、これは図形的には、ある点における「接線の傾き」を表すのです。

微分のことを一言で「まるい地球も住むときゃ平ら」（㊟2）といった人がいます。曲がりくねった曲線も、視野をどんどん狭くしていくと直線に近似できるというイメージです。つまり微分とは、連続でなめらかな曲線を局所的に直線とみなすことでそのグラフがどのような振る舞いをしているか（その瞬間瞬間で増加しているか減少しているか）を調べる学問なのです。

更にそのことから発展して、微分によって、様々な自然現象（運動など）や社会現象（経済の問題など）に現れる関係を定式化したり将来を予測したりすることができるのです。

以上が微分の大雑把なイメージです。

㊟1：このメールは 2008 年のものであり、その当時、上原投手がまさか大リーグに行って、しかも活躍するとは思っていなかった。

㊟2：この言葉は、元数学教育協議会委員長の小沢健一先生によるものである。

＜お父さんからのメール＞

微分に関するていねいな説明ありがとうございます。何度も読み返しました。何となく「微分」というもののイメージがつかめたような気がします。高校１年までは数学が好きだったのですが、２年の時の数学の教師が嫌な奴で、ほとんど授業を放棄していました。おかげで「数ⅡB」特に「微積分」のなんたるかが何も判らずじまいでした。高2からは全体的に成績が急下降しましたけれど、これは、その寸前、たしかに成績は良かったけれども、微分係数はマイナスだったということになりますかね？

（中略）「まるい地球も住むときゃ平ら」というのは最高ですね。昔のギリシャ人でしたか、「アキレスは絶対に亀に追いつかない」とか、「飛んでいる矢は止まっている」とかいう類のことを言っていたのは。こういう不合理な世界のからくりを覗くというのは嫌いじゃなかったです。

私の返信：ゼノンの逆理（パラドクス）ですね。アキレスと亀の話は微積分の一つの本質に迫る話だと思います。このようなことを連想するのはさすがと思います。

極限と言えば、アナログをデジタル化するということ、たとえば音の波なんかを極限まで細かくして数値化することだとしたら、微分のイメージに似ているでしょうか？あるいは画像の画素数なんかも、高質化のためには無限に小さく切り刻まなければなりませんよね。ミクロ経済学も、微分の応用なのでしょうか？景気が良さそうに見えても、微分係数を求めたらマイナスだったとか。一見豊かな暮らしをしているように見えても、実は借金だらけで台所は火の車であるというようなこととか。

私の返信：するどい指摘ですね。金融経済学では様々な微分方程式が登場します。私はあまり詳しくないので、うまくいえませんが、ある銘柄の株式を安いときに買い、高いときに売る、そこで差額を得るというのが株式投資の原則とします。ここで人間を「常に自分だけ得をしようという気持ちで行動する」モノと定義すればそこに一定の法則が生まれ、微分による解析が登場するのだと思います。もちろん、そんな単純なものではないと思いますが、最近では複雑系など、新しい数学の理論を取り入れた社会現象の解析が経済学などで行われているようです。

経済だけではなく、様々な自然現象や社会現象を「①現在はこのような状況である」⇒「②このままいくと（ここが微分の考え）」⇒「③将来はこのようになる」という筋道で考えることは、まさに微分によって世界を解明することを意味しています。

いろいろと書きましたが、微分の概念に対する僕のとらえ方はいかがなものでしょうか。間違っていたら指摘してください。先生の文章はたいへんわかりやすいです。上原とダルビッシュの例えもストンと来て、良かったです。

紙面が尽きてしまいました。次号「微分に市民権を再び！」に続きます。