

数学という名の自由の翼

第11回 2015年2月

偏差値について その②



1 偏差値の図形的意味

前回は、偏差値とは、自分の得点 X を、次の式で、得点 z に置き換えるという説明を行いました。

$$z = \frac{X - m}{h} \times 10 + 50$$

ここで、 m は平均点、 h は標準偏差です。

では、この式の意味を、ステップを踏んで調べていきましょう。

① $X - m$

これは、得点から平均点を引いたものですね。平均点と同じ得点の人は0点になります。つまり、この式は、「平均点を0点にするように得点を変換する」という意味を持っています。図形的にいうと、 X 軸方向に m だけの平行移動を行った、とも言えます。

② $\frac{X - m}{h}$

①のとき、得点全体の分布の散らばり具合、つまり標準偏差は変わりません。そこで、①を h で割った値にすることで、全体の標準偏差が1になります。つまり、②は、標準偏差を1に拡大縮小する式です。図形的に言えば、直線の傾きを変えることですね。

③ $\frac{X - m}{h} \times 10$

②とした瞬間、全体の標準偏差が1になったので、それを10倍すれば標準偏差が10となりますね。つまり③は標準偏差を10に拡大する式です。

④ $\frac{X - m}{h} \times 10 + 50$

③としても、全体の得点の平均は0点のままです。そこで、これに50を足すことで、平均点が50となります。

以上から、偏差値とは、その集団の平均点を50標準偏差が10となるように個々の得点を平行移動、拡大縮小したものにすぎないことがわかりました。

図形的には、直線 $y = x$ を、 $(m, 50)$ を通り傾き $\frac{10}{h}$ の直線になるように変形しただけです。

要するに、偏差値とは、魔法の式でも、万能の式でもないのです。いわば、どんなテストでも、偏差値に変換することで、平均50、標準偏差10となるので、異なるテストでも相互比較が可能になるということです。

2 偏差値で何がわかる？

大手予備校で開催される模擬試験のように、受験人数が多い集団であればあるほど、一般に、平均点に近い得点帯には多くの人が分布し、平均点から離れるほど、そのような点数をとる人数は少なくなるという現象が生じます。これは、中心極限定理といわれ、通常、平均点(50点)のところを頂点とする山型の分布が得られます。このような分布を正規分布といいます。

この山型分布を連続関数によって表現したものを、確率密度関数といいます。天才数学者ガウスによって正規分布の確率密度関数は

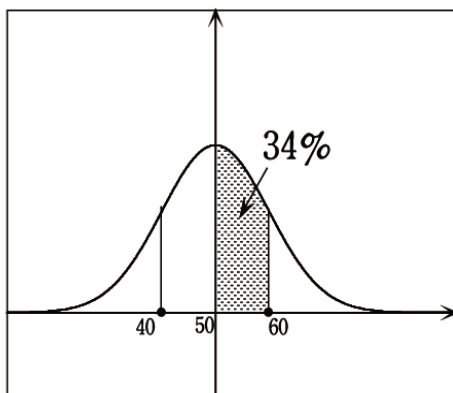
$$N(0,1) \quad y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}}$$

と表現されることがわかっています。ここで、 m は平均、 σ は標準偏差を表します。凄い式ですね。つまり、偏差値を表す確率密度関数は、

$$N(50,10^2) \quad y = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-50)^2}{100}}$$

この関数の変曲点が標準偏差の地点であり、グラフと X 軸とで囲まれる部分の面積を積分によって計算することで、順位が何番程度なのかを知ることができるのです。

模擬試験や、センター試験で偏差値が語られることが多いのは、このように正規分布曲線にあてはめて数学的に解析をして自分の順位をイメージすることができるからといえます。



例えば、図で、偏差値が50~60までの面積は、定積分の計算によって全体面積の34%であることがわかります。つまり、平均±標準偏差の部分には全体の68%の生徒が存在すると言えます。また、標準偏差の2倍の範囲、30~70までには、計算すると、ほぼ95%の人数が入るので、偏差値が70だった人は、「自分は集団の中で上位2.5%に位置する」などということが実感できるわけです。

もちろん、このことが言えるのは、集団が正規分布に従っているという条件の下で、であることに注意が必要です。

このように、正規分布の確率密度関数の細かい区

間ごとの面積の計算によって、偏差値帯ごとに、全体の中の何%であるのかを、テストの難易に依存せずわかるというのが偏差値の良さであるといえると思います。

問題はその偏差値が、どのように語られるかという部分であると思います。

3 偏差値と偏差値教育

個人的に思うのは、偏差値という統計手法には罪はないけれど、それを金科玉条として行われている教育に問題があるということです。

以前、「数学教室」に、模試の偏差値に振り回され、授業が荒れていくという内容の文を書いたことがあります。少し長くなりますが引用します。

S研模試の時期が近づくと、いよいよ躍起となる教師（または教師集団）がいる。模試対策なるプリントを大量に与える。やらせる。自己採点させて提出させる。チェックする。そして偏差値が上がるとホッとする。（上がらなかったら暴君のように怒る）そして、また次の模試に向けて同じことを行う。結果、始終模試対策の授業となる。

昔、進学校のある若い先生に、自分が目指す（尊敬する）数学教師とは聞いたら、

- ①生徒を鼓舞し模試の偏差値を引き上げる先生
 - ②提出物を100%集めきる凄腕教師
 - ③問題集や模試の過去問から問題を選定し、ベストな演習プリントを作成できる教師
- だそうだ。とほま。

偏差値を血圧、脈拍、心拍数として日々汲々としている数学教師の姿を垣間見た気がした。

偏差値を向上させることは、大学に合格したいという生徒のニーズに応えるためだと開き直る人もいる。果たして本当にそうなのだろうか。テストの得点が60点で偏差値45より、得点が20点でも偏差値が55の方が嬉しいのだろうか。

つまり問題が解けなくても偏差値が高ければ満足なのか。それは、数学がわかることより、人を負かすことが目標になっているということである。

教育学者の高橋勝氏（横浜国立大学）は、フランスの哲学者シラールの「欲望のミメシス論」を引用しながら次のように述べている。

「子どもは、教師の所有する知識にではなく、教師が抱く欲望とその言動からにじみ出る情熱に惹かれる生徒は、教師の行為を模倣するのではなく、教師が欲望する世界にあこがれてそれを欲望するようになる。いわば『あこがれにあこがれるのである』生徒は教師の『あこがれにあこがれる』と同時に、知への欲望に欠けた教師の惰性的な授業や、その振る舞いも無意識のうちに模倣し内面化する。

未知の世界を探求する喜びよりも、試験の点数がすべてだと内心思っている教師の授業を通して、点数こそがすべてだと貧しい学びの観念を植え付けられていくのである」（教育キーワード／時事通信社）

生徒が偏差値を気にするのは、大学に合格したいという欲求からというより、指導する教師が偏差値にこだわった「情熱的」授業をすることによるものであると私は推察する。（「数学教室」2012年8月号「進学指導も楽しみながら／下町壽男」より）

ドラッカーの「マネジメント」には冒頭からドキリとする言葉が書かれています。それは、「企業とは営利組織ではない」です。「人は利益によって動く」という利潤動機のみによって人の行動が説明できるという前提に立てば、企業は、利潤追求のためには何をやっても正義となってしまうという観点から、ドラッカーは次のように述べています。

「利潤動機は、的はずれであるだけでなく害を与えている」「この観念ゆえに、利益の本質に対する誤解と、利益に対する根深い敵意が生じている。この誤解と敵意こそ、現代社会におけるもっとも危険な病原菌である」更に「利益と社会貢献は矛盾するとの通念さえ生まれている」と断じています。そして、「企業が営利組織である視点に立つ限り、企業とは何か、企業の目的とは何かが見えてこない」と結んでいます。

私は、ドラッカーの企業における組織論を、勝手に

に数学の授業論のアナロジーとして読みました。

つまり、「企業」を「学校」あるいは「数学の授業」に、「利益」を「数学」あるいは「数学教育」に、「利潤追求」を「偏差値向上」に置き換えて考えてみるのです。すると、ドラッカーが述べたことは次のように読み替えることができます。

「数学の授業は、模試やテストの成績を伸ばすためにある」という前提に立てば、偏差値を上げるためには、何をやっても正義になる。なぜなら、生徒は、人より点数をよくしたい、偏差値を上げたいという動機で数学を学んでいるから。しかし、次のことが指摘される。「的はずれであるだけでなく害を与えている」「この考えが、数学教育に対する誤解と、数学への根深い敵意を生じさせている」「数学の学力向上と、数学を通して人格を陶冶し社会貢献する生徒を育成することは矛盾するとの通念を生む」

数学の授業の目的は偏差値を上げること、という視点に立てば、数学とは何か、数学教育の目的は何かが見えてこない。という感じになるのでしょうか。

では、ドラッカーは、企業の目的は何であると述べているのでしょうか。それは、企業の目的の定義は「顧客を創造すること」と論じています。企業は社会の機関であり、企業の目的は社会の中にある。そのために、人々が自覚していないニーズを探し、提供することで市場を生み出すということが書かれています。ここで「顧客のニーズに応える」のではなく「顧客（のニーズ）を創り出す」というところがポイントです。ドラッカーは例として、コピー機やコンピュータの欲求は、それが手にはいるようになって初めて生まれたと示しています。

さて、これも数学教育に置き換えてみましょう。

「教師が数学の面白さや、考えることの楽しさを伝え、自然・社会・生活における数学の有用性を示すような授業を行うこと、またはそのような授業を目指して研鑽を積むことが、生徒のニーズに応えるだけでなく、生徒の中に眠っている知的好奇心を呼び起こし、『数学という名の自由の翼』を持った生徒を創造していくのではないか。」 かな。