

数学という名の自由の翼

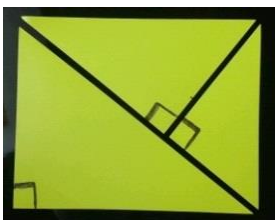
第9回 2014年12月

小粒でもピリリと辛い教具たち

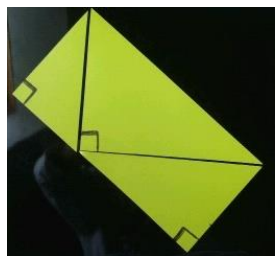


1 史上最低のジグソーパズル

もう25年以上前になりますが、元数学教育協議会委員長の小沢健一先生から、誰でも簡単に作れる「ジグソーパズル」を教えてくださいました。

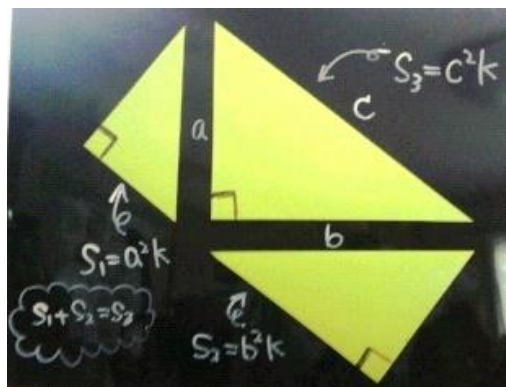


左写真の様な3枚の板を組み替えて別の四角形を作るというもの。



3秒でできました。「史上最低のジグソーパズル」とのこと。なんとともぼけたネーミングがいいですねえ。

でも、これは、単なる知育玩具ではなく、立派な数学の教材になります。



上写真において、小三角形、中三角形、大三角形は皆相似であり、その相似比は $a : b : c$ です。面積比は相似比の二乗なので、それぞれの面積は、

$$\text{小三角形} = ka^2$$

$$\text{中三角形} = kb^2$$

$$\text{大三角形} = kc^2$$

更に、小三角形+中三角形=大三角形なので、

$$ka^2 + kb^2 = kc^2 \quad \text{つまり、} \quad a^2 + b^2 = c^2$$

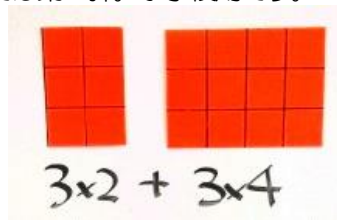
そうです。このパズルは、三平方の定理を簡単に説明できる教具でもあるのです。

2 史上最低のジグソーパズルに続け!

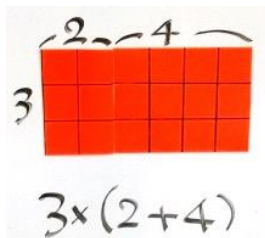
そこで、私も、負けじと、これに勝る「史上最低のジグソーパズル」を考えてみました(史上最低に「勝る」というのも変なのですか)。

<その1 分配法則を自然に気づく>

では第一弾。小学校用です。

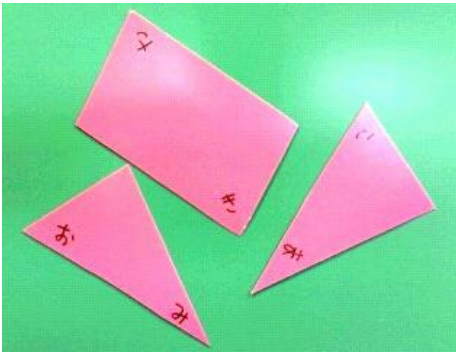


ただの 3×2 、 3×4 の板です。これを使って長方形を作りましょう。

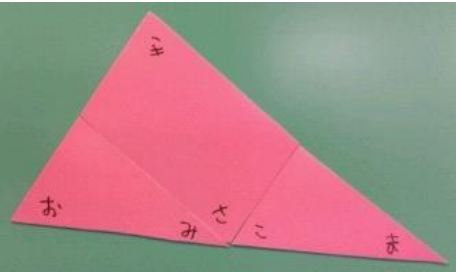
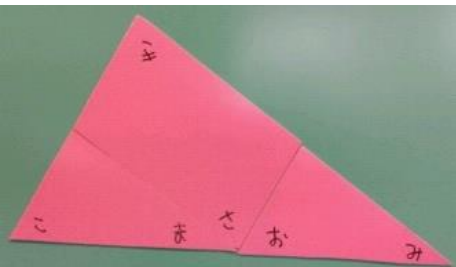
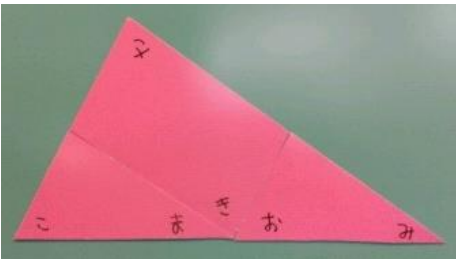


ばかばかしいかもしれませんが、これで、 $3 \times 2 + 3 \times 4 = 3(2 + 4)$ という分配法則が納得できる!

<その2 文字合わせと三角形の内角の和>



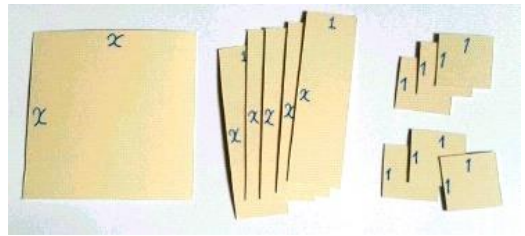
題名は「マキオとマサオとミキコとミサコ」
3枚の板を使って三角形を作ります。



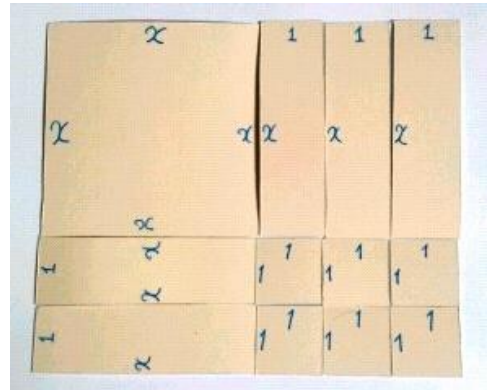
中央に、4人の名前を並べて遊びましょう。
三角形の内角の和が 180° であることと、中点連結定理の勉強になります。

<その3 ペキタイルから微分へ>

もう少し実践的なものを紹介しましょう。

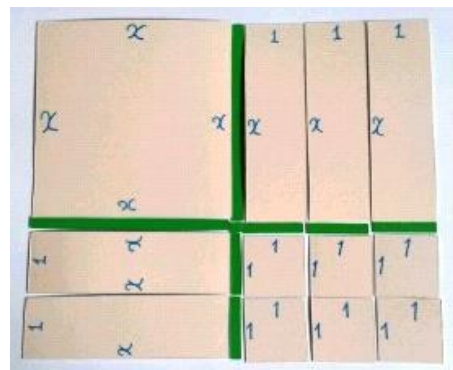


これは皆さんご存知のペキタイル。
これらの板を使って長方形を作ります。



$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$ がわかります。
これだけだとありきたりなので、高校バージョンを
考えてみましょう。

今、 x を「少しずつ膨張する量」とみます。



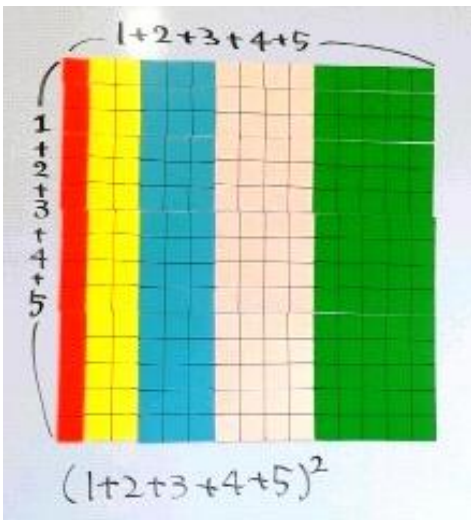
すると、上写真の太い部分が面積の増分ですね。
変化する面積を表す関数を $f(x)$ 、 x の増分を Δx
とすると、 $\Delta f(x) = (2x + 5)\Delta x$ が言えます。
ここで、 $\Delta x \rightarrow 0$ とすると、
 $f'(x) = 2x + 5$ が得られます。つまり、面積図を
作った段階で、交差する線分の長さが導関数を表し
ているということですね。

<その4 九九の表からΣの世界へ>

九九の表を作ってみます（とりあえず5の段まで）。

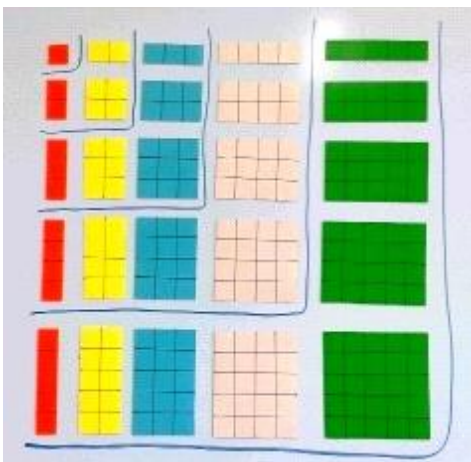
	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	6	8	10
3	3	6	9	12	15
4	4	8	12	16	20
5	5	10	15	20	25

隙間をくっつけて、面積を考えてみましょう。

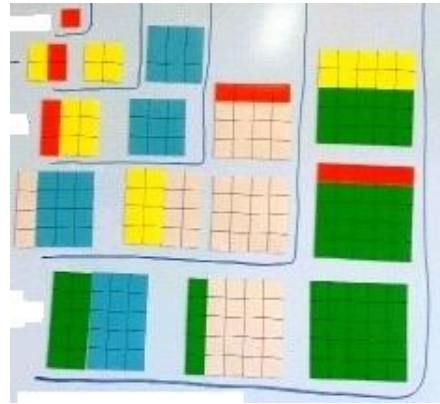


総和は、 $(1+2+3+4+5)^2$ ですね。

一方、これを、次のようにL字型に分解してみると、それぞれの区画内のブロックの個数はどうなるでしょうか。



次のように並べ直してみましょう。



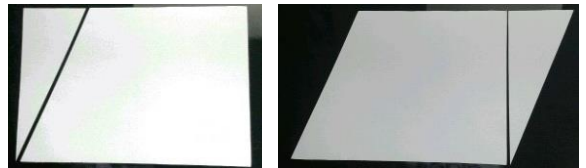
すると、上の区画から順に、 1^2 が1個、 2^2 が2個、 3^2 が3個・・・なので、求める総数は、 $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$ となります。

$(1+2+3+4+5)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$ が言えました！

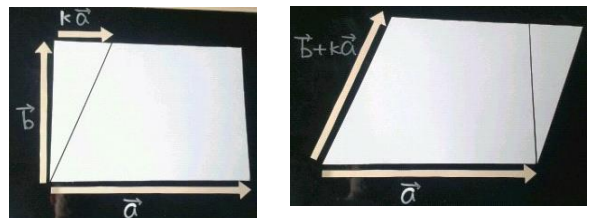
これは、小学校から高校を展望する教具です。

<その5 超・史上最低のジグソーパズル>

高校から大学を展望するものも考えてみました。



左写真の様に切った2枚の板で、右写真の様な平行四辺形を作るだけ。



左は、2つのベクトル \vec{a} 、 \vec{b} で張られる平行四辺形、右は、 \vec{a} 、 $\vec{b} + k\vec{a}$ で張られる平行四辺形。これらの面積は、行列式によって表されます。2つの面積が等しいので、このことは、行列式において、ある行の定数倍を他の行に加えても値は変わらないことの図形的な意味になります。

小粒でもピリリと辛い教具たち。それは、小中高大の垣根を越えて繋がる「自由の翼」である。