

多角形とその対角線の話

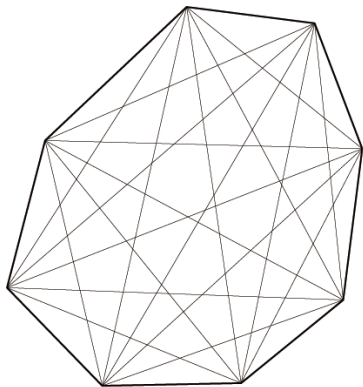


今回は多角形の対角線にまつわるいくつかの話題を紹介します。

1 凸八角形の対角線の本数

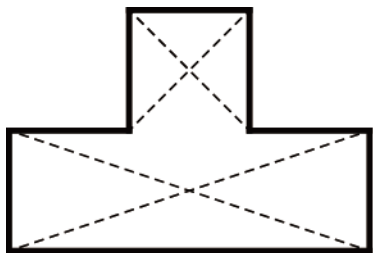
まずは、笑い話から。

ある年の夏休みの宿題に「凸八角形の対角線の本数を求めよ」という問題を出したことがあった。



8 個の頂点から 2 点を選ぶペアの決め方が ${}_8C_2 = 28$ 通りなので、それから辺の本数 8 を引いた 20 本が答えである。

ところが、4 本と答えていた生徒がいたので、なんで 4 本なんだろうなあと思い、その生徒に聞いたところ、何と彼は次のような図を書いたのである！



笑ってはいけません。彼はマジなのです。

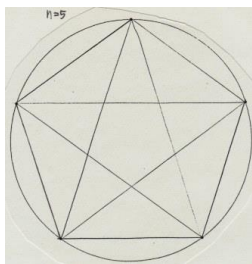
しかも彼は、結構勉強ができるのです。

ナルホド凸は八角形ではある。いやいやいや、そ

れは八角ではなく八画でしょう！

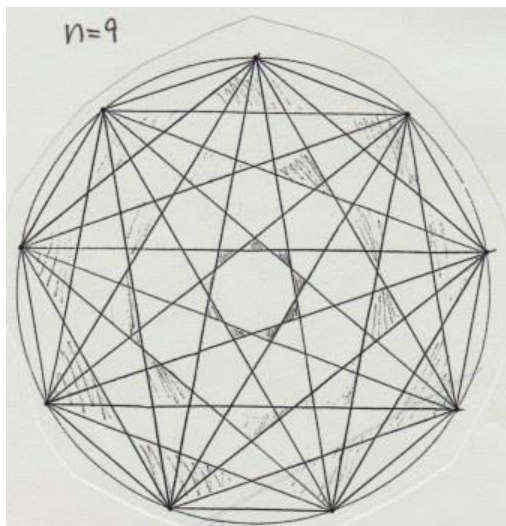
数学を指導する場合、言葉はちゃんと教えなきゃならんと肝に銘じたものだった。

2 フミカさんの大冒険



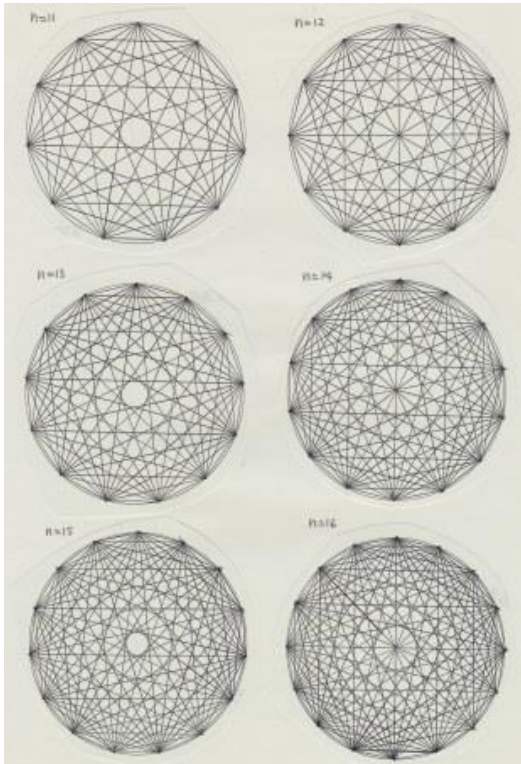
フミカさんという生徒が、正五角形の対角線を引いたとき真ん中に、相似の「子ども正五角形」ができることに気づいた。

面白そうなので、他の正多角形についても調べてみたいという。というわけで、正九角形でやってみるとやはり真ん中に子供ができています。



フミカさんはもっと調べてみたいということで、いろいろな正多角形の対角線を、手書きでどんどん引いていった。

3 子ども正多角形の話



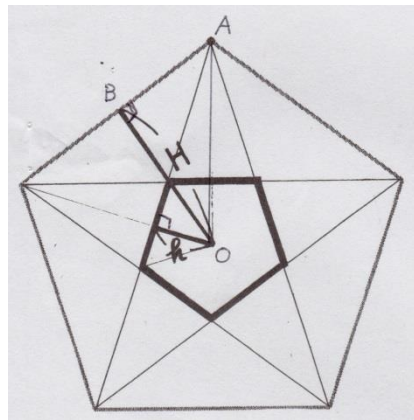
上図も、もちろん全部フミカさんの手書きの図である。パソコンなんか使わないのだ。

どうやら奇数角形るときには真ん中に白抜きの子供ができることがいえそうである。

そこで、美しい！と褒めたら、翌日彼女は何と！正36角形の対角線を引いてきたのだ！



もちろんこれもフミカさんの手書きの図である。



正五角形に対角線を引くと、内部に「子ども正五角形」が浮かび上がる。これは、前述のフミカさんが気付いた性質である。

この「子ども正五角形」は、もとの正五角形の面積の何倍だろうかという問題意識を持ったフミカさんの友人3名が自発的に研究し岩手大学で発表した。

上図で、大きい正五角形と、小さい正五角形の相似比は、 $H:h$ であり、ここで、 $OA=1$ とすると、 $H=\cos 36^\circ$ $h=\cos 72^\circ$ である。

これが彼女たちのアイデアである。以下、面積比は相似比の2乗になるので、

$$S:s = \cos^2 36^\circ : \cos^2 72^\circ$$

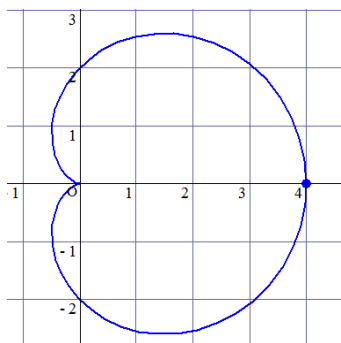
彼女たちの計算は次のとおり。 $\cos 72^\circ$ の値を用いることと、半角の公式を上手く適用している。

$$\begin{aligned} S:s &= H^2:h^2 \\ &= \cos^2 36^\circ : \cos^2 72^\circ \\ &= \frac{1+\cos 72^\circ}{2} : \cos^2 72^\circ \\ &= \frac{1+\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{2} : \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 \\ &= \frac{\sqrt{5}+3}{8} : \frac{6-2\sqrt{5}}{16} \\ &= 2(3+\sqrt{5}) : 2(3-\sqrt{5}) \\ &= 3+\sqrt{5} : 3-\sqrt{5} \end{aligned}$$

ここでは紙面の都合上、記さないが、彼女たちのレポートは、更に一般化（正n角形）の場合への考察に向かうとともに、正多角形についてもう一つ別の面白い性質についても論じている。

4 正37角形の対角線とカージオイド

カージオイド（心臓形）と呼ばれる図形がある。



(図は Grapes による)

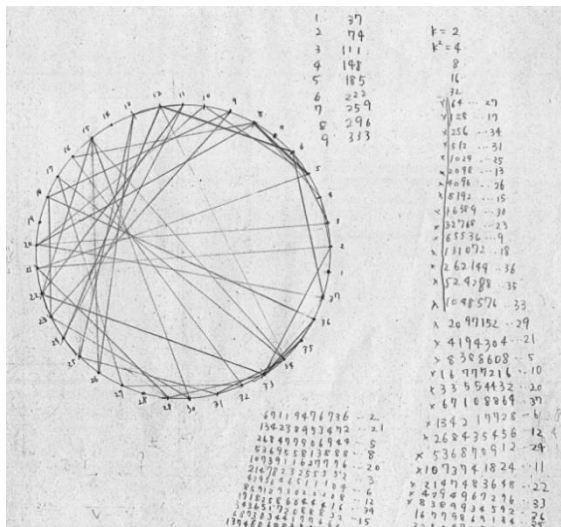
授業でカージオイドの説明をした後、余談として、ついこんなことをしゃべってしまった。

「確か、 p が素数のとき、正 p 角形の p 個の頂点に $1, 2, 3, \dots, p$ と番号を振り、 p を法として、2の n 乗となる点を次々結ぶ、例えば、 $p = 37$ のとき、 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 32 \rightarrow 64 \equiv 27 \rightarrow 128 \equiv 17 \rightarrow 256 \equiv 34 \dots$ 、と点を結んでいくとカージオイドが浮かび上がるはず。」

しかし、実は私はその事実はうろ覚えで、本当にそうなるのか自信がなく、話してから、勢いでいい加減なことを言ってしまう「ちょっとまずかったな」と反省していた。

すると、翌日ブッチ君という生徒が、「先生、やってみました！」と持ってきてくれたのがこの図。

$p = 37$ として描いている。



「本当にカージオイドが浮かび上がるんですね！凄

い」と生徒も興奮して話してくれた。

よかったあ。私はホッとするとともに、生徒に感謝した。

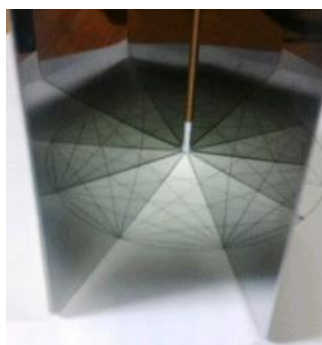
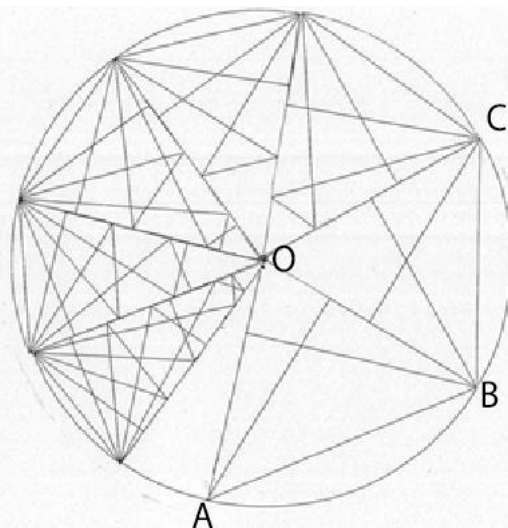
ブッチ君やフミカさんの活動を見て、「暇だね」「何の意味があるの」「何かの役に立つの」と言った同僚がいた。彼らが費やした時間を「壮大な無駄」と言った教師もいた。でも私はそうは思わない。そんなダッセエセリフを口にする人とは共に語るに足りぬ。

彼らの活動は、未知の扉を開け新たな発見に目覚めること、批判的な視点を持って自分の目で確かめること、数学の美しさや面白さを肌で感じることに、こんな経験により、彼らは「数学という名の自由の翼」を獲得し、数学の確かな力を身につけたはずだ。

そう。それは、何より、その後の彼らの学ぶ姿や進路によって、はっきりと示されたのである。

5 オマケ ものぐさなあなたのために

正多角形の対角線を描くのが面倒と思っているあなたに朗報！(笑) まずは、100均で小さい鏡を2枚買ってきて下さい。



上図に、写真の様に鏡を立てると、5~11角形までの対角線の様子を見ることがきますよ。お試しあれ。