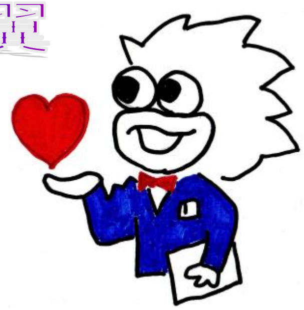
数学という名の自由の翼

第５回　2014年8月

集合とともだちになろう



　ヤマネコ小学校には、しもまっち、のんきぐま、マドンナうさぎ、学者うさぎ、がまんがえる、犬ざむらい、うかれぎつね、元気ネコ、がんばミミズ君という、９人（？）の楽しい仲間が通っています。

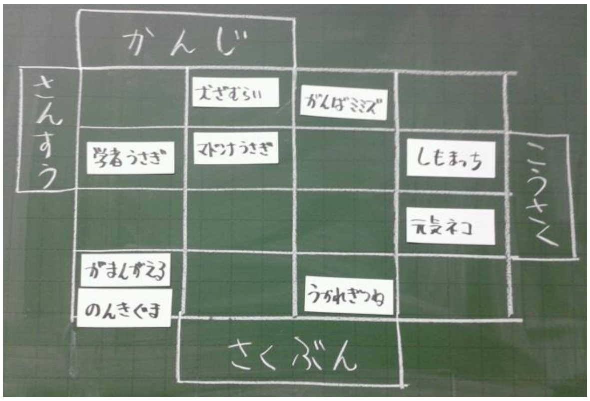
（キャラクタは伊藤潤一先生によるものです）

　さて、夏休みが明けると、待っているのは宿題の提出です。さあ、担任のネコ仙人が登場しました。

「宿題は、算数、漢字、作文、工作の全部で４つじゃ。みんな提出するのじゃ！」
ところが、この宿題を全部やってきた人は、マドンナうさぎさんだけでした。
　みんなの提出状況を一覧にすると、次の表のようになりました。

	算数	漢字	作文	工作
しもまっち	◎	×	×	◎
のんきぐま	×	◎	×	×
マドンナうさぎ	◎	◎	◎	◎
学者うさぎ	◎	◎	×	◎
がまんがえる	×	◎	×	×
犬ざむらい	◎	◎	◎	×
うかれぎつね	×	×	◎	×
元気ネコ	×	×	×	◎
がんばミミズ	◎	×	◎	×

　どうすればみんなが全部を出してくれるかな、と、ネコ仙人先生は考えました。一人ひとり呼び出して説教するのでは芸がありません。考えた末、教室の後ろの黒板に、次のような表を作り、カードにみんなの名前を書いてペタペタ貼り付けました。

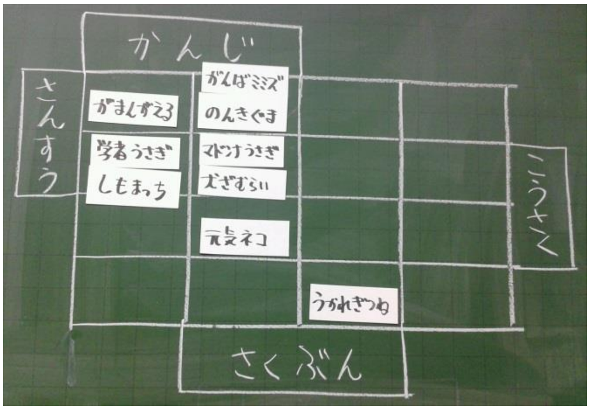


さて、これを見た９人の仲間たちは考えました。これって何だろう。
間もなく、学者うさぎ君が、気づきました。
「僕は、算数と、漢字と、工作の宿題を出している。でも、作文は出していない。だから、この部屋にいるんだ。」
マドンナうさぎさんは、にっこりして、
「私の場所は、全部出している人の部屋なのよ。みんな、早く私の場所にいらっしゃい。」
うかれぎつね君は、
「これを見ると、算数を出している人が５人、漢字を出している人も５人いる。元気ネコ君は工作しか出していないことがわかるよ。」
と、自分も作文しか出していないくせに、得意になって説明しました。
　すると、ネコ仙人先生のもとに宿題を提出する仲間たちが増えてきました。
　２日後の、提出状況は次のようになりました。

	算数	漢字	作文	工作
しもまっち	◎	●	×	◎
のんきぐま	●	◎	●	×
マドンナうさぎ	◎	◎	◎	◎
学者うさぎ	◎	◎	×	◎
がまんがえる	●	◎	×	×
犬ざむらい	◎	◎	◎	●
うかれぎつね	×	×	◎	×
元気ネコ	×	●	●	◎
がんばミミズ	◎	●	◎	×

黒丸が、新たに提出された分です。

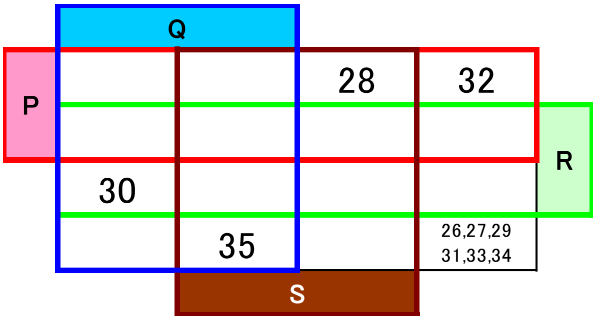
　この日、先生が教室に入ってみると、黒板の表は次のように変わっていました。



ネコ仙人先生は、
「マトリクス化したことで、子どもたちは自発的に課題に取り組み、更に、『集合と論理』の考えも自然に身に付いたのだ！」と思わずニンマリとしました。
そして、彼は、はっと気づきました。
「そうか。マトリクスにして１枚の絵のようにして眺めると、自分の課題の出し方の妥当性や、クラスの生徒の取組みの傾向がわかるんだ。一覧表は、個人をターゲットにして『指導』するけれど、マトリクスだと、今声をかけるべき子どもを『支援』する方向に考えることになるんだ。」
　評価とは、提出物を出していない者を、ひたすら撲滅することではない。自分の指導法を振り返ること。指導とは、教師の都合や効率性だけを考えて、一律、一斉に同じことを子どもに要求するのではなく、個々の子どもの状況に見合った声かけをすること。など、ネコ仙人先生自身が学んだのでした。

　さて、本題に入りましょう。今年のセンター試験の数学Ⅰ・Aの集合の問題では、４つの集合の包含関係について問うものでした。
$U=\{n \mid n$ は$5<\sqrt{n}<6$ を満たす自然数$\}$　とし、
$P=\{n \mid n\in U$ かつn は4の倍数$\}$
$Q=\{n \mid n\in U$ かつn は5の倍数$\}$
$R=\{n \mid n\in U$ かつn は6の倍数$\}$
$S=\{n \mid n\in U$ かつn は7の倍数$\}$
と、４つの集合が定義されています。

　$25 < n < 36$ なので、n は26から35までの自然数ですね。では、これらの集合を、先ほどのようにマトリクスで表してみましょう。



これさえ作れば、どんな問題も「どんとこい」です。

(1)　U の要素は $\boxed{\text{タチ}}$ 個である。

(2)　次の⓪～④で与えられた集合のうち、

空集合であるものは $\boxed{\text{ツ}}$, $\boxed{\text{テ}}$ である。

⓪ $P\cap R$　① $P\cap S$　② $Q\cap R$　③ $P\cap\overline{Q}$　④ $R\cap\overline{Q}$

(1)　図を見ればわかるように、U の要素は 10 個

(2)　図から、⓪　$P\cap R=\Phi$　①　$P\cap S=\{28\}$

②　$Q\cap R=\{30\}$　③　$P\cap\overline{Q}=\{28,32\}$

④　$R\cap\overline{Q}=\Phi$

がすぐわかるので、答えは⓪と④。

(3)　集合 X が集合 Y の部分集合であるとき、

$X\subset Y$ と表す。このとき、次の⓪～④のうち、

部分集合の関係について成り立つものは $\boxed{\text{ト}}$

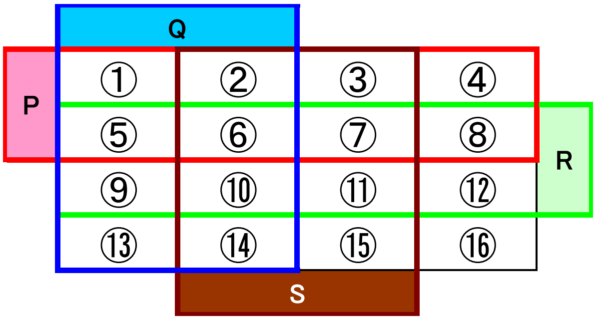
$\boxed{\text{ナ}}$ である。

⓪ $P\cup R\subset\overline{Q}$　① $S\cap\overline{Q}\subset P$　② $\overline{Q}\cap\overline{S}\subset\overline{P}$

③ $\overline{P}\cup\overline{Q}\subset\overline{S}$　④ $\overline{R}\cap\overline{S}\subset\overline{Q}$

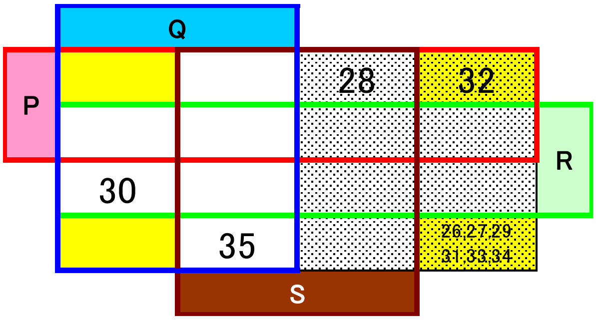
　一見複雑そうですが、例えば、$P\cup R$ は次の図にあげたマトリクスの①～⑫なので {28,30,32}。一方、$\overline{Q}$ は、③④⑦⑧⑪⑫⑮⑯なので、30 が含まれないので、これは解にはならないことがわかりますね。

　同様に考えていくことで、答えは、解答欄の①と④であることが理解できます。



皆さんも確かめてみて下さい。

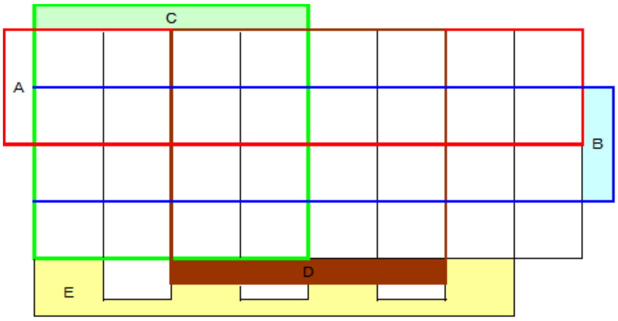
＜参考＞　問題文の解答の選択肢④の場合



色つきセルが $\overline{R}\cap\overline{S}$ 、打点部分が $\overline{Q}$ なので、

$\overline{R}\cap\overline{S}\subset\overline{Q}$ であることがわかります。

　集合が、もう一つ増えて、５つになった場合はどうすればよいでしょう。



　あまり実用的ではありませんが、このように表すこともできます。

　数学の勉強とは、教科書の鵜呑みではなく、そこから「自由の翼」を持って、教科書で習ったことを再構成してみることではないかと思います。その過程が、きっと数学を楽しむ時間になるし、結果、あなたの人生を充実させてくれると思います。

ブログ「あなたと夜と数学と」

もよろしくね！