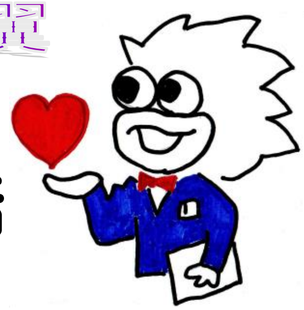
数学という名の自由の翼

第４回　2014年7月

解の公式の歌と自己言及の話



突然ですが、皆さんは、「解の公式」という歌をご存知ですか？

青森県の中村潤先生が、作詞・作曲された曲で、彼の授業開きでは、教室にギターを持って行って必ずこの歌を歌うのだそうです。

♪　君は覚えて　いるだろうか
二人で歌った　解の公式を
分母は２ａ　分子はマイナスｂ
プラスマイナスルートの　ｂ２乗
マイナス４ａｃ

私も、授業で何度も歌わせていただきました。ただでさえ大うけなのですが、「マイナスビー」のところで、懐からおもむろに「ナスビ」を出して見せながら「Ｍｙナスビ～」と歌うと更に盛り上がります。

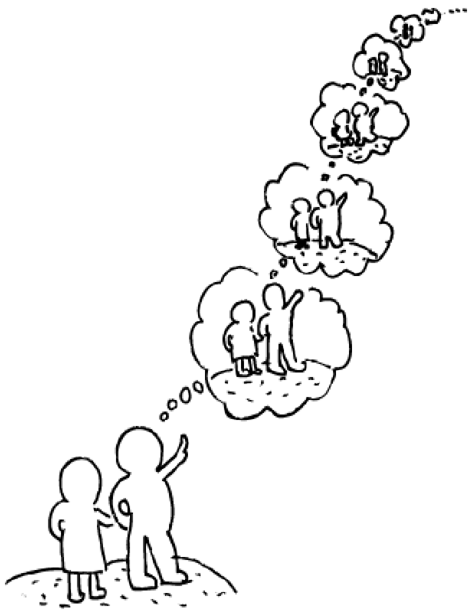
でも、笑いますよね。恐らく高校生であろう男女が、浜辺かどこかで、２人夕日を見ていたりする。そして、ロマンチックに愛を語るのかと思ったら、歌うは「解の公式」・・・。

（伊藤潤一先生作：ネコ仙人が歌う解の公式の図）

さて、この「解の公式」の歌詞、良く見ると、何か変です。

「君は覚えているだろうか。二人で歌った『解の公式』を」

つまり、二人は、解の公式を、以前にどこかで歌っていたということになります。ということは、そのときも、「二人で歌った解の公式を」と歌っているのだから、その更に前にも「解の公式」を歌っていなければならない。すると、その前も・・・・ということで、下図のような無限に連なる構造がイメージされます。



このような無限連鎖が起こるのは、「解の公式」という歌の歌詞の中に「解の公式を歌う」という自分自身のことが述べられているからです。

これは自己言及型の構文といわれるものです。

例えば、「私はいつも嘘をつきます」

というのも自己言及型の構文です。この言葉が正しいとすると、「私」が嘘つきであることは嘘ということになります。すると、「私」は嘘をつかないということだから、「私」の言っていることは正しい、ということは、やっぱり「私」は嘘つきだった。でも・・・と無限連鎖に陥ります。

また、例えば次のような、二者による無限連鎖も考えることができます。

ネコ仙人「しもまっちは、いつも嘘をつく」
しもまっち「ネコ仙人様、ウソつかない」

ネコ仙人が言っていることが本当だとすると、しもまっちが言う「ネコ仙人がウソをつかない」が嘘になるので、ネコ仙人は嘘を言ってることになります。とすると、しもまっちは嘘をつかないことになり・・・と無限連鎖が始まります。

ところで、以前、「解の公式」の作詞者の中村先生に、「この歌詞って自己言及ですよね」と問いただしたところ、彼は、直ちにこう言いました。

「いや、この曲はね、『解の公式』という歌ではなく、『解の公式歌』という歌なの。」

なるほど。そうだったのか。浜辺の二人は「解の公式歌」の中で、「解の公式」という別の歌を歌っていたことを思い出しているということか。

それだと、確かに無限連鎖から逃れられます。

でも、そうすると、「解の公式」という別の歌を作らなければなりません。

そこで私は、こんな歌を考えてみました。

「解の公式」

♪君と私の思い出は、あのとき二人で歌った

「解の公式歌」よ　～

「解の公式歌」の中で、「解の公式」という別の歌を歌っていることを思い出していますが、すると、そのとき、それ以前に「解の公式歌」をどこかで歌っていることになり、これは、先ほどのネコ仙人としもまっちのような、合わせ鏡状態の無限連鎖になってしまいます。

そんなわけで、「解の公式歌」は二次方程式の授業だけでなく、論理の話にも使える二度美味しい歌であるというお話でした。

さて、この「自己言及」を実際に目で見てみましょう。次の図をご覧ください。

何だと思いますか。

実は、ビデオカメラをテレビにつないで、画面を撮影したものです。

カメラはテレビの画面を撮影し、それを画面に映しだします。同時に、その映された画像をコミで、カメラはそれを撮影し、それを、画面に映します。その映された画像をコミで、カメラはそれを撮影し、またそれらを画面に映し出す・・・・

このような無限連鎖の中で、合わせ鏡のように、フレームが無限に映し出されることになります。

この現象は、例えば、マイクをスピーカーの近くに持ってくと、マイクで拾った音源が、スピーカーで再生され、それをまたマイクが拾い、スピーカーで再生する・・・と同じものといえます。

ただ、マイクとスピーカーの場合は、音が拡大する方向に次々繰り返されるので「ハウリング」という現象が生じてしまいますが、テレビカメラの場合

は、逆に画像が次々縮小されていくので、だんだんある一点に近づいていくように見られます。

更に、今度はカメラを少し傾けてみましょう。

これは感動ものです。

つまり、カメラで撮った像を、画面に映し出すという操作は「自分自身を縮小し別の像として移す」という「写像」を順次繰り返していると考えることができます。更に、カメラを傾けるということは、縮小の他に「回転」という写像が合成されたということになります。このことから、上の写真のような螺旋型の図形が生じ、像がある１点に向かっていくことがわかります。

少し、数学っぽく話をします。例えば、カメラで撮った画像が再生されるとき、前の画像の 80%のサイズになるとします。そして、カメラを 30 度傾けた状態で固定する、という操作を考えます。

このような操作は、次のように、複素数によって表すことができます。

複素数αを、$\alpha = 0.8(cos30° + isin30°)$

とします。集合Ｘ内の各点zに対して、

$f(z) = \alpha z$という写像を考えれば、Ｘの点全体で表される図形は、全体が80%に縮小され、30°だけ回転したものに移されます。更に、移す位置を変えたい、つまり、平行移動したい場合は、もう一つ別の複素数βを用意して、$f(z) = \alpha z + \beta$ という写像を行えばよいということになります。

つまり、このビデオカメラの画像の世界は、「複素縮小写像の繰り返し」という数学の言葉で語ることができるのです。

少し難しくなりますが、オマケの話題を一つ。

テレビのモニターではなく、２台のカメラとプロジェクタを用いて、２か所に映し出したとします。

そこで生じた2つの画像を、１つに重ねあわせてみるとどのような図形が生じるか考えてみましょう。

仮にカメラは２台とも$\frac{1}{\sqrt{2}}$倍の縮小率で、一方のカメラは、45 度回転、もう一方のカメラは−45°回転して、少し平行移動することにします。これを実験するのは難しいので、数学の言葉で考えます。

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(cos45° + isin45°)z$$

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(cos45° - isin45°)z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

上の2つの複素写像を考えます。

コンピュータ上で乱数を使って、任意の１点に対して、f, g のいずれかを選んで変換し、その変換された点を、また f, g のいずれかを選んで変換して、と、点の軌道を求めるシミュレーションをしてみました。すると、初期値や乱数系列に関係なく、下の図の様になります。

単純な操作の繰り返しだけで、こんなユニークな図形ができるなんて。そして、それを数学の力で調べることができるなんて、ワクワクしてきますよね。