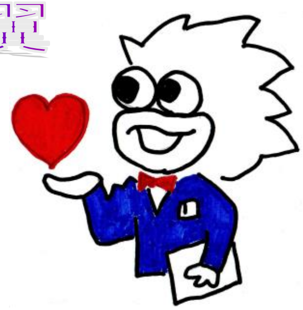
数学という名の自由の翼

第２回　2014年５月

整式の割り算を表す式



男は快楽を重ねて父になり、女は苦難を重ねて母になる？

　ある日の、ある夫婦の会話。

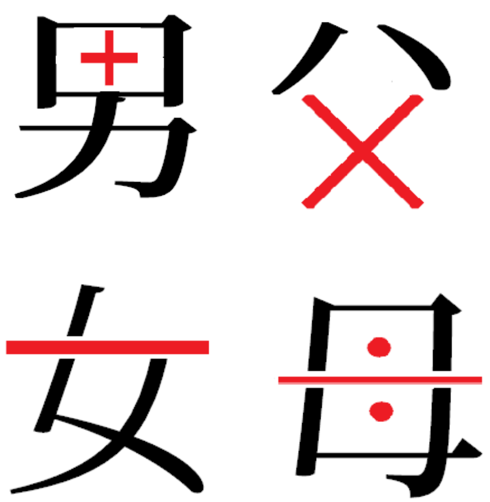
妻：私はあなたと結婚して、子どもが生まれてから苦労ばかりだわ。あなたは好きなことばっかりやっているけれど。

夫：そりゃあ、男はプラス（＋）を重ねて父になり、女はマイナス（－）を重ねて母になるというじゃあないか。

（ホームページ「あなたと夜と数学と」（下町）より）

　いきなり、変な会話で失礼しました。女性蔑視だ！などと言わないでくださいね～。シャレなんです。

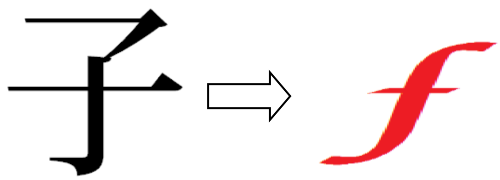
　昔、「男」と「父」という字を眺めていて、「＋」と「×」の記号が潜んでいて面白いなあと思っていた。じゃあ、「女」と「母」はどうかと思って見てみると、なんと！「－」と「÷」が隠れているではないか。



　私は、この関係を見つけたとき思わず「わかった！そういうことだったのか！」と膝を打った。

（何が、「そういうこと」なんだか）

　ついでに、最近、気付いたことだが、「子」という字をじっと見ると、ｆ　が浮かんで見えませんか？



　やはり「子」は「父」と「母」の関数（function）だったのだ！（何が「やはり」なんだか）

　さて、冗談はこれくらいにして。

　私は別に、男女や父母の関係のことをいいたかったのではなくて、「＋」を重ねたものが「×」で、「－」を重ねたものが「÷」だということである。

　まず、「＋」と「×」の関係を見てみよう。

$2+2=2\times2$

$2+2+2=2\times3$

$2+2+2+2=2\times4$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

$2+2+2+2+2+2+2+2+2+2=2\times10$

確かに、足し算を重ねれば掛け算になるといえる。

　ならば、引き算はどうなのか。引き算を重ねたものを割り算といってよいのだろうか。

　例えば、$22\div7$　を考えてみよう。

・22から７を１回ひく

$22-7=15$　→まだひける

・15から７を1回ひく

15−7=8　→まだひける

・8から７を１回ひく

8−7＝1　→もうひけない

つまり、「22÷7=3 あまり１」とは

22 から７は３回ひけて、引けない分（余り）は１であるということ。

ここで「引き算を重ねたものが割り算になる」と高らかに宣言しよう！（宣言させて！）

さて、上で述べた計算過程をまとめると

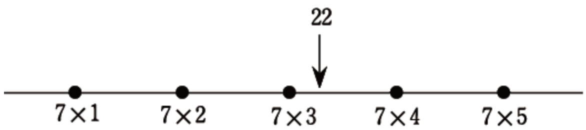
22=7×3＋1　と書くことができる。

この式は、「22 を7で割ると、商が３で余りが１である」ということと同値である。

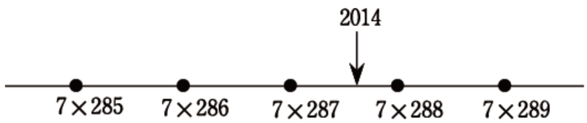
このような割り算の仕組みを、次の図のような数直線によってイメージしてみよう。

７つごとに区切られた部屋（7 刻みの数直線）のどの部屋に 22 が入るかという見方で考える。

22 は図のように、7×3 と7×4 の間の位置に入る。



もし、2014 だったら、図のように、7×287と7×288 の間の位置に入る。

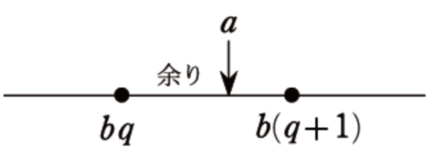


どんな整数も、どの部屋に入るかはただ一通りであるところがポイント。

では、一般的な場合を考えてみよう。

整数 a を整数 b で割って、商が q 、余りが r という場合を考えてみる。

bごとに区切った部屋（数直線）のどこか１か所にa は必ず入る。



この図から不等式を作ると

$bq \leqq a < b(q+1)$

各辺からbq を引くと、

$0 \leqq a - bq < b$

ここで、$a - bq = r$ とおく。すると、この式から次の２つのことがすぐにいえる。

① $a = bq + r \ (0 \leqq r < b)$

これが整数の割り算を表す式である。a, b に対して、q, r がただ一通りに決定されている

② a とb がともに、ある数 d の倍数なら、それらの差である r も同じように d の倍数である。

この考えを使えば、$\frac{b}{a}$ と、$\frac{r}{b}$ は同じ数で約分できることがわかる（ユークリッドの互除法）。

①②は、割り算という算数的な操作から、構造の美しさを持つ数学の世界へ飛び立つための「自由の翼」である。

では、いくつかの問題から、この式の威力を感じてみよう。

【問題１】

市川小学校の３年生は１クラス30 人で５学級あります。今、５クラスの児童全員が体育館に集まってゲームをすることにしました。皆に５人ひと組のグループを作ってもらったところ、３人の子どもが余ってしまいました。そういえば、今日は風邪が流行っていて、各クラス数名の欠席者がいるかもしれないということでした。ただ、５人以上休んでいるクラスはないそうです。

そこで、今度は３人ひと組のグループを作りました。すると、今度は２人の子どもが余りました。

さて、体育館には何人の子どもがいるでしょう。

５人一組のグループが30 組あったとすると、

$n = 5 \times 30 + 3 = 153$　　これは人数オーバー

では、29 組だとすると

$n = 5 \times 29 + 3 = 148$

でも148 を３で割ると1余るのでダメ。

では、28 組だとすると

$n = 5 \times 28 + 3 = 143$　これは３で割ると２余る。ウマイぞ、これが答えだ。こんなカンジですすむ。

　今度はこれを高校生風に解いてみよう。

児童の総数をn（人）とすると、条件から

　$n = 5k + 3$（kは整数）とかけるし、

　$n = 3l + 2$（lは整数）ともかける。

そこで、$3l + 2 = 5k + 3$ として、lについて解いて、更に仮分数を帯分数に直すようなイメージで、次のように式変形を工夫する。

$$l = \frac{5k+1}{3} = \frac{6k-k+1}{3} = 2\mathrm{k} - \frac{k-1}{3}$$

k は整数なので、$k-1$が３の倍数でないと、l は整数にはならない！

よって、$k = 3m + 1$（mは整数）とかける。

つまり、kは３で割ると１余る数ということである。

$m = 9$とすると、$k = 28$　このとき　$n = 143$人

$m = 8$とすると、$k = 25$　このとき　$n = 128$人

128 人のときは、欠席が学年全体で 20 人を超えているので、必ずどこかのクラスは欠席が５ 人以上になっているので適さない。（答　143 人）

この手法を「無理やり割り算作戦」と名付けよう。

【問題２】

　よしひろさんは、１個 300 円のケーキと、１個 350 円のケーキを合せて 10 個買い、3300 円はらいました。300 円のケーキと 350 円のケーキをそれぞれ何個買ったのでしょう。

　これは、東京書籍の中学校２年の教科書「連立方程式」の章に出ている問題である。

　教科書では、300 円のケーキの個数を x 個、350 円のケーキの個数を y 個として、

　個数の関係から　　$x + y = 10$

　代金の関係から　　$300x + 350y = 3300$

と連立方程式を立てて解いている。未知数が２つあるので、式は２つなければならない！と力説したいところだが、実は最初の条件はなくても OK。

　では、この問題を、次のように変えてみよう。

【問題２’】

　としみちくんは、１個 300 円のケーキと、１個 350 円のケーキを合せて何個か買い、3300 円はらいました。300 円のケーキと 350 円のケーキをそれぞれ何個買ったのでしょう。ただし、どちらのケーキも必ず買っていることとします。

「無理やり分数作戦」を使って解いてみよう。

xについて解くと

$$x = \frac{3300 - 350\mathrm{y}}{300} = 11 - \frac{7\mathrm{y}}{6}$$

xは自然数なので、yは6の正の倍数でなければならない。そこで、$y = 6$ とすると、$x = 4$

yが6より大きい場合は、xが負になるからダメ。

つまり、300 円のケーキを４個、350 円のケーキを６個買ったことがわかった。

【問題３】

$\frac{171}{2014}$ を約分しなさい

$\frac{171}{2014}$ と $\frac{2014}{171}$ は、同じ数で約分できるから、$\frac{2014}{171}$ で考える。

$$\frac{2014}{171} = \frac{171 \times 11 + 133}{171} = 11 + \frac{133}{171}$$

前ページの②から、$\frac{171}{2014}$ の代わりに $\frac{133}{171}$ の約分を考えればよいので

$$\frac{171}{133} = \frac{133 \times 1 + 38}{133} = 1 + \frac{38}{133}$$

同じように考えて

$$\frac{133}{38} = \frac{38 \times 3 + 19}{38} = 3 + \frac{19}{38}$$

同じように考えて

$$\frac{38}{19} = 19 \times 2$$

つまり 19 で約分できることがわかった。

整数の割り算の式の威力は伝わっただろうか。