39 パスカルの三角形は汲めども尽きぬ数学の泉

単元等　数学Ⅰ　数と式（二項式の展開）

数学Ｂ　数列（数列の和）

◆Contents

・道順の考えとパスカルの三角形
（ライプニッツのアイデア）

・パスカルの三角形と母関数

1　授業の内容

(1) パスカルの三角形で展開式を分析

(2) 二項定理の説明

2　授業を見ての所感

先日は個別訪問におじゃまして，授業を見せていただきありがとうございます．

冒頭から先生の生徒に対する「熱い」姿勢が見られとても嬉しかったです．

また，研究会では数学科の先生が積極的でとてもいい雰囲気であると感じました．先生はいろいろな意見を吸収しようという姿勢が見られとても感心しました．どうぞこの調子で頑張ってください．

3　補足すること

私は，個別訪問を行った先生に対して，教材研究ネタなど，数学的内容を中心にお話させていただいております．

今回は，パスカルの三角形に関する話題を提供させていただこうと思います．

道順の考えとパスカルの三角形

先生の授業では，パスカルの三角形の生成過程を，天下りに提示するのではなく，ブラウン運動（ランダムウォーク：道順の数え上げ）の手法で説明されていました．前時に道順の数え上げがコンビネーションになることを説明していれば，パスカルの三角形の n 段目が ${}_nC_k \quad (0 \le k \le n)$ となることが自然に納得できますね．

パスカルの三角形の提示で，このようなアプローチはあまり見たことがなかったのでとても参考になりました．

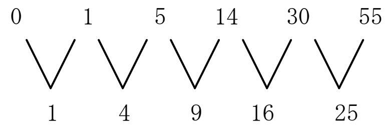
パスカルの三角形ではありませんが，道順の考えを利用して，数列の一般項や和を簡便に求める方法がありますので紹介したいと思います．

例として

$1^2+2^2+\cdots+n^2$ を取り上げてみましょう．

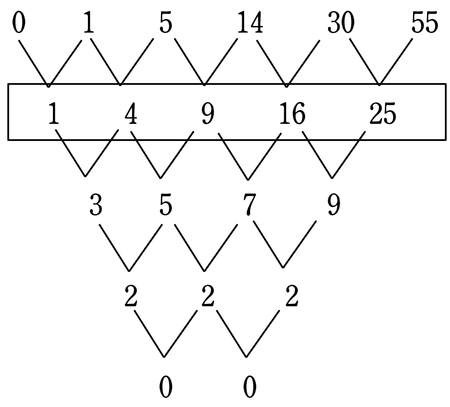
簡単に考えるために，まず，$n=5$ とします．

まず，初項を０として，第一階差が 1,4,9,16,25 となるように数列を作ります（下図）．



上段の数列は，下段の数列の和に対応します．例えば，上段の数列の 55 は 1+4+9+16+25 のことですね．

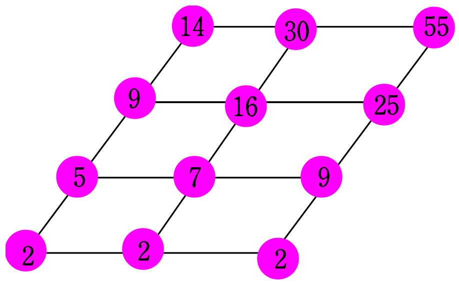
今度は，もとの数列から下方に階差数列を作ります．階差が全て０になるまで作り続けます．（下図参照）



さて，ここで，一番上段の数列の末項 55 について考えます．直前の項を見ると，55=30+25 なのですが，30=14+16 だし，16=9+7 というようにどんどん遡って見ていくと，結局，各階差数列の初項

である１と３と２が何回も足されて 55 になっていると考えることができます．

では，まず２の足される回数を調べましょう．



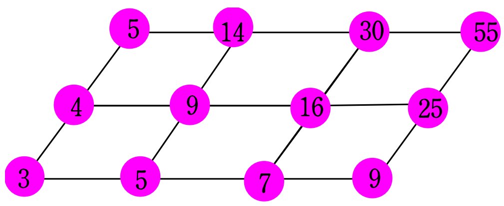
図のような格子をかいて考えると，２が足される回数は，ちょうど左下の２から右上の 55 の地点に最短経路で進む道順の数に対応します．

つまり，${}_5C_3$ 回なので，その分の総和は

${}_5C_3\times 2=20$ となります．

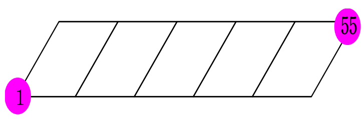
同様に３の足される回数を調べると，下図の左下３から右上 55 までの道順を数えればよくて

${}_5C_2\times 3=30$



最後に，１の足される回数は，図から

${}_5C_1\times 1=5$　となります．



すると確かに，20+30+5=55　となりますね．

このことを一般化すると，第 n 項までの和は，

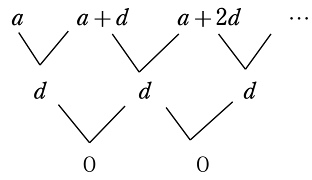
$$S={}_nC_1\times 1+{}_nC_2\times 3+{}_nC_3\times 2$$

$$=n+\frac{3}{2}n(n-1)+\frac{1}{3}n(n-1)(n-2)$$

$$=\frac{1}{6}n\{6+9(n-1)+2(n-1)(n-2)\}$$

$$=\frac{1}{6}n(2n^2+3n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

この手法で，等差数列の和を求めてみましょう．



図から，

$$S={}_nC_1\times a+{}_nC_2\times d$$

$$=na+\frac{1}{2}n(n-1)d$$

$$=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$$

うまく求められました．この方法を発見したのは微積分の基礎を作ったライプニッツだそうです．

パスカルの三角形と母関数

母関数は高校数学では扱われませんが，組合せ論などで非常に有効な考えとなるものなので，機会があれば生徒にも示したいところです．

母関数とは，ある数列　$a_1, a_2, a_3,\cdots$ が与えられたとき，それを各係数にするような x の多項式のことをいいます．

例えば，数列が｛1, 3, 3, 1｝ならば，その母関数は，$f=1+3x+3x^2+x^3$ となります．

では，パスカルの三角形に潜む母関数を探ってみましょう．

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
&&&&&&1&&&&&&\\
&&&&&1&&1&&&&&\\
&&&&1&&2&&1&&&&\\
&&&1&&3&&3&&1&&&\\
&&1&&4&&6&&4&&1&&\\
&1&&5&&10&&10&&5&&1&\\
1&&6&&15&&20&&15&&6&&1
\end{array}$$

例えば，上図において０段目から数えて３段目の数列｛1, 3, 3, 1｝の母関数を f_3 とすると，

$f_3=(1+x)^3$ となりますね．

では，４段目の数列{1, 4, 6, 4, 1}はどうなるでしょう．パスカルの生成過程を考えると，４段目は，３段目の数列に，それを１桁分右にずらした数列の足し算になっていますね．

$$
\begin{array}{l}
\quad(1,\ 3,\ 3,\ 1)\\
\qquad\quad(1,\ 3,\ 3,\ 1)\\
\hline
\quad(1,\ 4,\ 6,\ 4,\ 1)
\end{array}
$$

これを母関数で考えると，

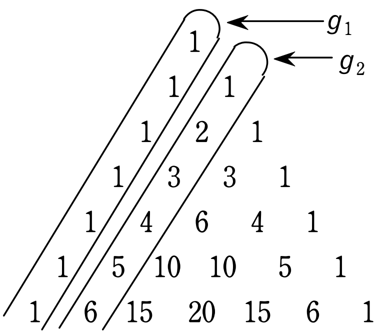
$f_4=f_3+xf_3=(1+x)\,f_3=(1+x)^4$　となります．

一般に，n 段目と，$n+1$ 段目の関係を母関数で考えると，$f_{n+1}=(1+x)\,f_n$ となり，$f_1=1+x$ なので，$f_n=(1+x)^n$ となることがわかりますね．

つまり次のようにまとめることができます．

パスカルの三角形 n 段目の数列の母関数は

$f_n=(1+x)^n$ である



今度は，パスカルの三角形の，斜めの数列の母関数を考えてみます．

図で，$g_1=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots$

これは，初項１公比 x の無限等比級数の和なので，

$g_1=\dfrac{1}{1-x}$ となります．

（母関数では，収束半径のことは考えない．つねに x は０に近いとみる．ちなみに x を 0.1 とすると 1.11111･･･となりますね）

では，g_2 はどうなるでしょう．

g_2-xg_2 を計算してみます．

$$
\begin{array}{ll}
(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\cdots) & \\
(0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\cdots) & (-\\
\hline
(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1\cdots)=g_1 &
\end{array}
$$

つまり，$g_2-xg_2=g_1$　となりました．

このことから，

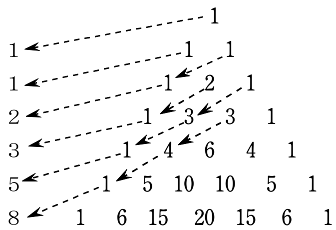
$(1-x)g_2=\dfrac{1}{1-x}$　$\therefore g_2=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ とわかりました．同様に考えていくと，次のようにまとめることができます．

パスカルの三角形斜め第 n 列の数列の母関数は

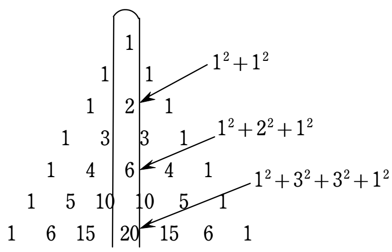
$g_n=\dfrac{1}{(1-x)^n}$　である

その他いろいろな母関数を見つけることができます．パスカルの三角形は組めども尽きぬ泉とも言うべき魅力的な教材です．「パスカルの三角形で遊ぶ」経験を早いうちに積めば，数学が大好きになる生徒も増えてくるのではないかと思います．

パスカルの三角形桂馬の和とフィボナッチ数列



パスカルの三角形縦数列と横数列の平方和



COFFEE　BREAK 21

マイナス×マイナス
はなぜプラス？

（負の数）×（負の数）はなぜ（正の数）になるのでしょうか。納得できるように説明してください。

これは，数学検定の準2級の問題です．
いろいろな解法を考えてみましょう．

＜解答Ⅰ＞　髪の毛の数

S：髪の毛の本数で説明する話が私は一番好きです．
例えば，1日にちょうど3本毛が生える人がいるとします．すると，現在の時点を０日とすると，4日後には現在より何本増えているでしょうか．

μ：$3\times4=12$ 本ですね．

S：では，現在から4日前は，現在より何本増えているといえばよいでしょう．

μ：12本減っているのですね．

S：そうですが，これは-12本増えたと考えましょう．
つまり　3本$\times(-4)$日$=-12$本　と考えます．
では，今度は「1日に髪の毛がちょうど3本ずつ抜けていく」人について考えてみます．
現在から4日後，髪の毛は何本増えているでしょう．

τ：-3本$\times4$日$=-12$ 本　つまり12本今より少ないということですね．

ρ：そうか．今度は，この人の4日前の髪の毛の本数を考えればいいんだ．-3本$\times(-4)$日$=12$ 本　つまり，今より12本多いということですね．

S：そうですね．これが
（マイナス）×（マイナス）＝（プラス）の一つの説明といえると思います．

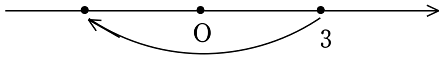
＜解答Ⅱ＞　-1の作用

τ：もっと普通に数学的に証明とかできないのですか．

S：うーん．中学校のときどんなふうに習ったかな．

ρ：特に説明はなかったような…

S：どうやるんだろう（しばらく考える）．
実数を数直線上に表すとします。今、数直線上の点 a に対して，-1 をかけるというのを，原点に関して対称な点に移動すると定義します．
例えば，-3 は，3に-1 をかけたものと見て，図のように原点に関して対称移動した点に移ります．



このように考えると，
$-3\times(-2)$ は，$-3\times(-1)\times2$ なので，まず-3 に-1 をかけることで，-3と原点に関して対称な点 3 に移動するので，3×2 となって 6 となります．だめかな．

＜解答Ⅲ＞　Well defind

S：（負の数）×（正の数）＝（負の数）を使って考えるのはどうだろう．
まず，（負の数）×（正の数）＝（負の数）はいいよね．
例えば，-3×4 というのは，-3 が4個つまり，
$(-3)+(-3)+(-3)+(-3)=-12$
ですね．では，かける数を一つずつ少なくしていきましょう．
$-3\times5=-15$
$-3\times4=-12$
$-3\times3=-9$
$-3\times2=-6$
$-3\times1=-3$
$-3\times0=0$
どんなことがいえる？

τ：かける数が前より１つ少なくなると，計算結果は３ずつ増えていきます．

S：ということは，$-3\times(-1)$ はどうなっていればいいでしょう．

ρ：なるほど．前の数より３増えるので，
$-3\times(-1)=3$ とすれば都合がいいのですね．

μ：　$-3\times2=-6$
$-3\times1=-3$
$-3\times0=0$
$-3\times(-1)=3$
$-3\times(-2)=6$
……………　　という感じですね

＜解答Ⅳ＞結合法則を自明として

S：例えば，$-a\times\{b+(-b)\}$ という式を考えましょう．このとき、$b+(-b)=0$ なので
$-a\times\{b+(-b)\}=0$ ですね．この式の左辺を展開するとどうなりますか．

μ：$-a\times b+(-a)(-b)=0$ となります．

S：そうですね．この式の両辺に $a\times b$ を加えると
$a\times b-a\times b+(-a)(-b)=a\times b$
$\therefore(-a)(-b)=ab$　これで示されました．