38　群数列のエッセンス

単元等　数学Ｂ　数列（群数列）

◆Contents

・群数列の導入にあたって

・集合の濃度の話

・類推の危うさ

・群数列の水源地は

１　授業の内容

群数列の解法

２　授業を見ての所感

先日は，個別訪問での授業を見せていただき，ありがとうございました．非常に高いレベルでの文武両道を標榜している貴高の生徒の指導は，恐らく外から見てわからぬ厳しいものがあるのだろうと推察いたします．そのような中，OB として自信を持って生徒への指導に当たっている姿を拝見し，頼もしく感じました．

８月の授業力向上セミナーもどうぞよろしくお願いします．

３　補足すること

私は，個別訪問などで授業を実施された先生に対して，主に教材研究のネタを中心にコメントさせていただいております．

今回は，群数列に関連していくつか感じていることを述べさせていただきたいと思います．

群数列の導入にあたって

今回の授業で初めて群数列が登場したわけですが，まず，群数列の背景や，学ぶ意義を考えてみたいと思います．

群数列とは，ある意味，数列を内包する数列と考えることができます．一般に群の番号が増えると，中に含まれる項数は規則的に増えていくので，授業後の研究会でも話しましたが，一列に表現するよりも，２次元に項を配置したほうが，問題の本質が見えるのではないかと思います．

例えば，教科書の応用例題４の群数列

(1),(2,3,4),(5,6,7,8,9),(10,11,12,13,14,15,16)・・・

ならば，下図１のようにＬ字形に自然数を並べたときの数の規則を考えるという問題意識から出発するのが自然であると思われます．

図１

1	2	5	10	17	26	……
4	3	6	11	18	27	……
9	8	7	12	19	28	……
16	15	14	13	20	29	……
25	24	23	22	21	30	……
36	35	34	33	32	31	……
……	……	……	……			

また，先生が提示された問題

(１),(2,3),(4,5,6),(7,8,9,10),・・・・

は，下図２のように三角形状に自然数を配置したと見ることができます．

図２

1	2	4	7	11	16	……
3	5	8	12	17	…	……
6	9	13	18	…	…	……
10	14	19	…	…	…	……
15	20	…	…	…	…	……
21	…	…	…	…	…	……
……	……	……	……			

従って，群数列とは，自然数などの数列を平面上に配置したときの，項の位置を求めるための手段と考えることができます．

逆に，どんな並べ方に対しても，その配列の規則によらず「群数列の考え」を基にすれば，いつも同じパターンで解決できるというのがポイント（群数列の良さ）ではないかと思います．

集合の濃度の話

少し格調高い話をしてみたいと思います．例えば，前頁の図１や図２は，自然数の列が平面上に書かれています．つまりある行と列が１つずつ決まれば，それに対応して自然数が１つ対応しているということです．つまり２つの自然数のペアに対し１つの自然数が対応しているので，

「正の有理数と自然数は対応をつけられる」というイメージがわいてくると思います．

これは奇妙な気がします．自然数は１の次は２，２の次は３と順序が決まっていくのに，分数は，例えば1/2と1/3の間には無数の分数が存在しているので，1/2の次にくる分数が決められません．ですから，正の有理数全体をもれなく番号をふっていくのは無理なのではないかと感じます．

ところが，19世紀のドイツの数学者で，現代集合論を築いた数学者カントールは，群数列の考えを用いて，有理数の集合と自然数の集合は１対１に対応できることを見事に示しました．

以下，少し長くなりますが，集合の濃度から連続体仮説まで概観を述べてみたいと思います．

＜集合の濃度（無限って何だろう）＞

自然数の集合　$\{1,2,3,4,5,6,\cdots\cdots\}$
と，偶数全体の集合　$\{2,4,6,8,10,\cdots\cdots\}$
を考えます．

$$\begin{array}{l}\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,\cdots\cdots\}\\ \quad\ \downarrow\quad\ \downarrow\quad\ \downarrow\quad \downarrow\quad\ \downarrow\quad\ \ \downarrow\\ \{\quad 2\ ,\ 4\ ,\ 6\ ,\ 8\ ,\ 10\ ,\ 12,\cdots\cdots\}\end{array}$$

上のような対応を考えると，偶数の集合は，自然数全体の集合の半分の「大きさ」というイメージですが，

$$\begin{array}{l}\{1,2,3,4,5,6,7,8,\cdots\cdots\}\\ \ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow\qquad \text{2倍を対応}\ ※\\ \{2,4,6,8,10,12,14,16,\cdots\cdots\}\end{array}$$

とすれば，偶数全体は自然数全体と1対１に対応するので２つの集合は同じ「大きさ」と考えることもできます．

現代の数学では，今述べた，無限集合の「大きさ」を集合の「濃度」ということばで表現します．そして，上で述べた※のように，自然数全体の集合Nと1対1の対応がつく集合を可算集合（可算無限集合）といいます．つまり一般に

> 「無限（可算無限）」とは
> 「自然数全体と1対1に対応がつくこと」

とまとめることができます．

＜有理数と自然数の対応＞

それでは，カントールの行った手法で，有理数と自然数を対応させてみましょう．

まず次のような群数列を考えます

$$\frac{1}{1},\left|\frac{1}{2},\frac{2}{1}\right|,\left|\frac{1}{3},\frac{2}{2},\frac{3}{1}\right|,\left|\frac{1}{4},\frac{2}{3},\frac{3}{2},\frac{4}{1}\right|,\cdots$$

第k群は，分母と分子の数の和が$k+1$となるような規則です．

この数列には$\frac{1}{1},\frac{2}{2},\frac{3}{3}$など同じ値になるものがあるので，1度出てきた数は取り除くことにします．

$$\frac{1}{1},\left|\frac{1}{2},\frac{2}{1}\right|,\left|\frac{1}{3},\frac{3}{1}\right|,\left|\frac{1}{4},\frac{2}{3},\frac{3}{2},\frac{4}{1}\right|,\left|\frac{1}{5},\frac{5}{1}\right|\cdots$$

さらに先頭に０を加え，プラスとマイナスを交互につけていきます．

$$0,\frac{1}{1},-\frac{1}{1},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{2}{1},-\frac{2}{1},\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\cdots\cdots$$

この数列にはすべての有理数全体が1回ずつ現れるので，頭から番号を1,2,3,…とふっていけば自然数全体と1対1に対応させることができるのです．すなわち，

> 有理数の濃度は自然数の濃度と同じである

ということがわかったのです．

$$\frac{1}{1},\left|\frac{1}{2},\frac{2}{1}\right|,\left|\frac{1}{3},\frac{2}{2},\frac{3}{1}\right|,\left|\frac{1}{4},\frac{2}{3},\frac{3}{2},\frac{4}{1}\right|,\cdots$$

という群数列はよく試験にも登場しますが，ルーツはここだったのですね．

では，実数全体の集合も，今のようにうまい対応を考えれば，自然数と同じ濃度となるのでしょうか.

＜対角線論法と連続体の濃度＞

残念ながらそううまくはいきません.
カントールは実数全体が自然数と1対１に対応できないことを「対角線論法」という見事な方法で示しました.

対角線論法は非常に有名で，高校生にも納得できる面白い手法なので，「お話」として紹介してもいいのではないかと思います.

◆対角線論法

開区間 $(0,1)$ の無限にある数をすべて以下のように，1列に並べたとします.

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 0.b_{11}b_{12}b_{13}b_{14}b_{15}\cdots\cdots \\
a_2 &= 0.b_{21}b_{22}b_{23}b_{24}b_{25}\cdots\cdots \\
a_3 &= 0.b_{31}b_{32}b_{33}b_{34}b_{35}\cdots\cdots \quad \cdots(※) \\
a_4 &= 0.b_{41}b_{42}b_{43}b_{44}b_{45}\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

（ただし，0.23 などの有限小数は０を付加して 0.2300000000000… と表すとする）
さて,ここで(※）の各値から $b_{n,n}$ を取り出した数
$0.b_{11}b_{22}b_{33}b_{44}b_{55}\cdots\cdots$ 　を考えます
この数に対し，各 $b_{n,n}$ に対しそれと異なる数 c_n を対応させて
$0.c_1c_2c_3c_4\cdots$ 　という数を考えます.
例えば，$b_{n,n}$ が5以上なら $c_n=1$
$b_{n,n}$ が4以下なら $c_n=9$ 　として，
小数点以下に現れる数がすべて1と9だけの小数を考えてもいいわけです.

さて，このようにして作った
$0.c_1c_2c_3c_4\cdots$
は，(※）に含まれているでしょうか.
答えはノーですね.
（※）内のどの数とも $b_{n,n}$ が異なっているので
$0.c_1c_2c_3c_4\cdots$ 　はどの数とも一致することはありません.

よって，次のことが言えます.

> 実数は自然数全体と1対１の対応をつけることができない.

ちなみに，自然数全体の集合の濃度を，$\aleph_0$（アレフゼロ），実数全体の集合の濃度を $\aleph$（アレフ：連続体の濃度）といいます.
カントルは

「$\aleph_0$ と $\aleph$ との間の中間の濃度は存在しない」

という予想をしました．これが数学の世界で非常に有名な「連続体仮説」といわれるものです.

岩手からこの仮説の証明に挑んでくれる人が出てくれれば嬉しいかぎりです.

類推の危うさ・・・

群数列は，「何丁目何番地に誰がいるか」と「誰は何丁目何番地に住んでいるか」を考える郵便配達のようなものです.

例えば，数列

(1),(2,3),(4,5,6),(7,8,9,10),‥‥

について，「10 群の 5 番目の項は何か」や「100 は何群の何番目か」などということがわかれば，群数列をほぼマスターしたといってもいいのではないかと思います.

そのためにはどのような考えを拠り所にしていけばいいのか考えてみたいと思います.

＜各群の先頭の項を一般化する＞

上の数列において各群の先頭の数を並べると

1,2,4,7,11……

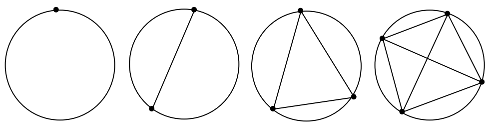
となるので，それらの数列から（階差数列を用いて）一般項を求めるという考え方がよくあります.
しかし，先生も研究会で言われたように，これは類推の域を出ないので，これを主に考えていくのはあまりすすめたくありませんね.

（第 k 群の先頭の項を p_k とおくと, 次の先頭まで k だけ増えていることから， $p_{k+1}=p_k+k$ という漸化式を作れば，類推にはならないが)

余談ですが，私は「類推」の危うさを生徒に説明するとき，次の２つの例を紹介しています.
（一応どちらも数列の話題ということで)

＜１＞円の分割

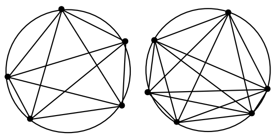
円周上に点をとってそれらをすべて結んで線分を作ります．ただし，3 直線が 1 点で交わらないように点をとります．とる点の数を増やしていくと円はいくつの部屋に分かれるでしょうか．



$a_1=1$　$a_2=2$　$a_3=4$　$a_4=8$

$n=1,2,3,4$ とすると，1,2,4,8 となります．

ここで，多くの生徒は等比数列になっていると類推します．そこで，$n=5,6$ の場合を数えさせると何と，$n=6$ で 31 となり規則が崩れていることがわかります．



$a_5=16$　$a_6=31$

＜２＞完全数

自分自身を除く約数の和が自分自身となる数を完全数といいます．ユークリッドは 6,28,496,8128 の 4 つの完全数を発見しました．

ところで，これらの 4 つの数は

$$6=2^1(2^2-1)$$
$$28=2^2(2^3-1)$$
$$496=2^4(2^5-1)$$
$$8128=2^6(2^7-1)$$

と表すことができます．さて，では 5 番目の完全数は何でしょう．

数字の並びから $2^{p-1}(2^p-1)$（p は素数）と類推し，$2^{10}(2^{11}-1)$ を 5 番目の完全数としそうですがこれは間違い．5 番目の完全数は，$2^{12}(2^{13}-1)$ で，これが見つかったのはユークリッド後 1500 年近くも後ということです．実は $2^{p-1}(2^p-1)$（2^p-1 は素数）となるのがポイントです（証明は等比数列の和の公式を使えば高校生でも平易）

群数列の水源地は…

今述べたような「群の先頭の数から類推」ではなく，先生も言われたように「**第 n 群まで項がいくつあるか**」を考えると群数列の問題は見通しが良くなると思います．例えば

(1),(3,5),(7,9,11),(13,15,17,19),・・・・

であれば，私は，まず次の図をかかせます．

①②③④・・・・・・・・ⓝ

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ 個

つねにこの図を拠り所にして考えていけば群数列は難しくありません．

＜例１＞10 群の 5 番目の項は何か

①②③・・・・・・・・・・・⑨　⑩

$\dfrac{9\cdot10}{2}=45$ 個

10群の5番目は通算　45＋5＝50番目

群を取り去った数列の一般項は

$a_k=2k-1$ なので

$a_{50}=99$　答

＜例２＞2011 は第何群の何番目か

$a_k=2011$ とすると $k=1006$

つまり2011は通算1006番目

とりあえず40くらいでやってみる

①②③④……㊵

$\dfrac{40\cdot41}{2}=820$　個

足りない！そこで45までにしてみる

①②③④……㊺

$\dfrac{45\cdot46}{2}=1035$　個

オーバー！　でも45群にあることは確定

さあ，答案を作ろう．

①②③④……㊹　㊺

$\dfrac{44\cdot45}{2}=990$　個

990＋45＝1035個

図のように，44群までの項の個数は990個で

45群までの項の個数は1035個である．

2011は通算1006番だったから

第45群の16番目である答