36　斜交平面で線形空間の構造を学ぶ

単元等　数学Ｂ　ベクトル（ベクトル方程式）

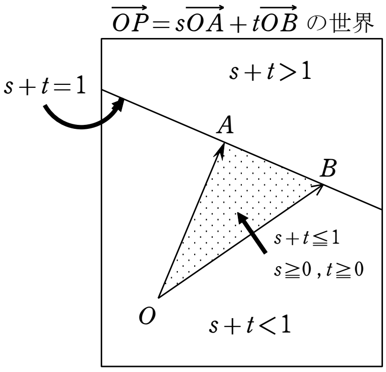
◆Contents

・斜交平面

・１次変換と行列式

１　授業の内容

(1)　既習事項の確認



(2)　斜交平面の説明とその利用

２　授業を見ての所感

先日はお忙しい中，個別訪問での授業を行っていただきありがとうございました．

ベクトル方程式で表された動点Ｐの存在範囲を，普段の授業では取り扱わない斜交座標を用いて考えさせる授業ということで，先生の意欲と志の高さを感じました．また，生徒の授業への取り組みがとても立派で，特にノートは，後から見てポイントがわかり易く整理されたものとなっていました．先生の指導がよく行き届いているのだと思いました．

大学入試問題などでは，斜交座標で考えると，ある意味解析幾何的な手法ですいすい解いていくことができるので，進学校や予備校などでは結構教える先生も多いようです．ただ，形式的に教えると，ベクトルのエッセンスが失われ，操作先行に陥る懸念もあります．そもそも，斜交座標の「座標」とはユークリッド平面の座標系ではなく２つの基底ベクトルの「係数系」なので，混乱が生じる可能性があります．（つまり，座標軸に数値を入れていながら距離は不問にすることへの違和感や，ユークリッド平面上に斜交平面を載せたときに生じる不都合性）

先生はその辺をきちんと理解されていて，ベクトルの概念をきちんと示し，それと関連付けながら説明を進めていました．

このようなことから，先生が生徒に，概念や意味を教えながら，更に入試問題を解く力をつけさせたいという熱意を感じることができました．

３　補足すること

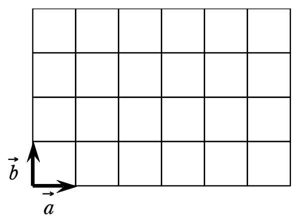
私は，個別訪問の際，授業者の先生に，事後に，教材研究ネタを提供することにしています．

先生への話題提供だけではなく，最終的に，授業者の先生の授業をヒントにして教材集を作り，県内の先生方に提示することを目標にしています．

今回は，先生の授業から斜交平面，斜交座標系についての話題に触れたいと思います．

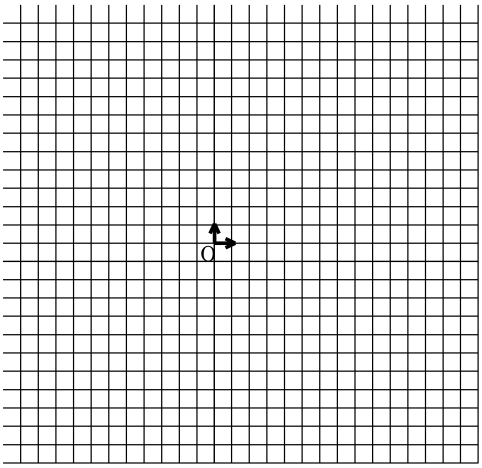
斜交平面

概念として生徒に伝えたいのは斜交平面に「座標」を入れた斜交座標ではなく，格子で作られた斜交平面という格子の性質，つまり２つのベクトルで張られた線形空間の構造の方です．



今，図のように２つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ で作られる格子を考えてみます．

この格子は，実際は無限に広がっている格子平面（次頁図）の一部です．

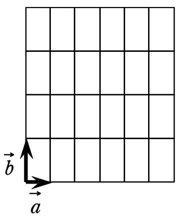


もし，２つのベクトルが直交して，なおかつ大きさが１であれば，座標軸を入れることで，一般的な座標平面（ユークリッド平面）となります．

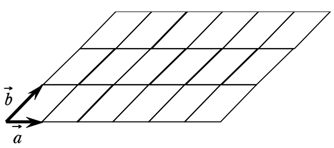
ユークリッド平面上に図形を置くことにより，点や線分の位置関係や，結合関係，あるいは線分の長さや角度，図形の面積などを考えることができます．

さて，今この格子平面を，２つのベクトルの始点（O）を固定して次のように変形しましょう．

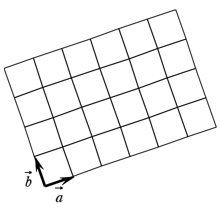
(1)　$\vec{a}$，または$\vec{b}$方向に伸縮する



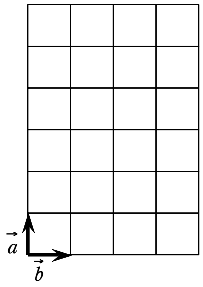
(2)　$\vec{a}$，または$\vec{b}$方向にずらす（図は$\vec{a}$方向に格子１つ分ずらしたもの）



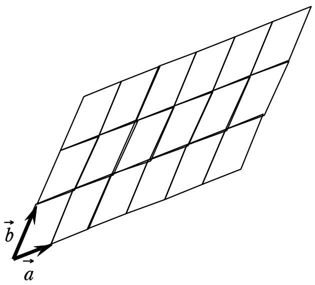
(3)　O の周りに回転する



(4)　裏返す



これらの変換を合成すると，最初の格子平面は，図のような平行四辺形で作られる格子平面に変形することができます．



この変換は１次変換とよばれます．

このようにして得られた平行四辺形の格子平面（斜交平面）と，最初の単位正方形で作られている格子平面の構造について調べてみましょう．

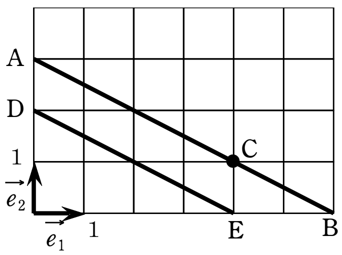


図１

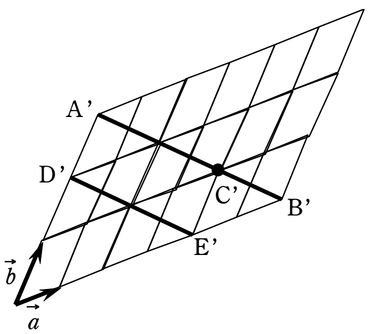


図２

①　対応する点のベクトル表示

図１でC地点は，２つの基底ベクトルによって $\overrightarrow{OC}=4\vec{e_1}+\vec{e_2}$

と表すことができますし，変換された図２における C’地点は

$$\overrightarrow{OC'}=4\vec{a}+\vec{b}$$

と表せます．つまり，対応する点は２つの基底によって，同じ係数で表されることがわかります．

②　平行な直線

図１の平行な２直線ABとDEは，図２でもやはり平行な２直線A’B’，D’E’に対応しています．

つまり斜交平面になっても**平行性は維持される**ことがわかります．

③　分点の比

図１でABを２：１に内分する点Cは，図２でも，A’B’を２：１に内分する点C’に対応しています．つまり次のことが言えます．

斜交しても比は保存されている

これはとても重要な性質です．

④　２点を通る直線

2点を通る直線は, ①によって対応する2点を通る直線になります.

もし，点が格子上になくても，格子を細分することによって，やはり細密な格子平面を作ることができるので，図１の任意の2点を通る直線は，図２の対応する2点を通る直線に移ります.

このことから図１を x, y 座標平面と見れば，

直線の方程式　$ax+by=c$ は

図２において，x, y を s, t を対応させる斜交座標系を考えれば, 方程式は $as+bt=c$ とできるわけです．これが斜交座標で問題を解く切り札になります.

一方，不都合な問題もあります.

⑤　2点間の距離・図形の面積

図１のABの長さは $3\sqrt{5}$ なのですが，図２でA’B’の距離とは同じになりません．また，図１の△OABの面積は求めることができますが，図２では面積を求めることはできません.

図１の格子平面（ユークリッド平面）は，基底ベクトルが大きさ１で直行している（正規直交基底）ので，長さや面積を求めることができる「線形計量空間」ですが，図２は線形空間ではあるけれど計量ができない空間ということになります.

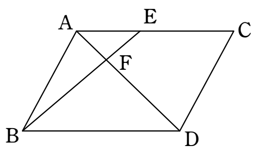
図２で計量をするためには，２つのベクトルの大きさと，内積を定義しておかなければなりません．そこで，計量空間は内積空間ともいわれます.

以上のようなことから，非常に素晴らしい考えが導かれます．それは,

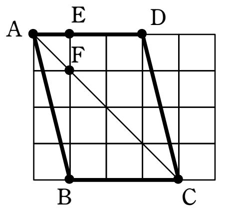
図形の問題で，点と直線の結合関係，直線の平行性，同一直線上の比だけからなる問題はどんな格子平面で考えてもよい.

ということです．いくつかの例を示します.

例１

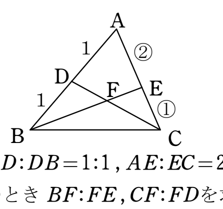


$AE:EC=1:2$, $AF:FD=1:3$
のとき，$BF:FE$ を求めよ.

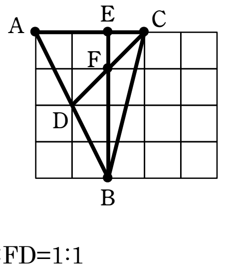


右側のように格子平面を作ると BF:FE=3:1 がすぐわかる.

例２



$AD:DB=1:1$, $AE:EC=2:1$
のとき $BF:FE$, $CF:FD$を求めよ



右図から BF:FE=3:1，CF:FD=1:1

数学者の瀬山士郎先生（群馬大学名誉教授）は，方眼紙，格子平面の構造にもっと注目して平面ベクトルの指導を行うべきだと主張しています．

彼の「数学の目・算数のすがた」（日本評論社）という著書に書かれている「方眼紙とベクトル空間」の話はとても勉強になる内容です．

その中から面白い話題を以下に紹介します．

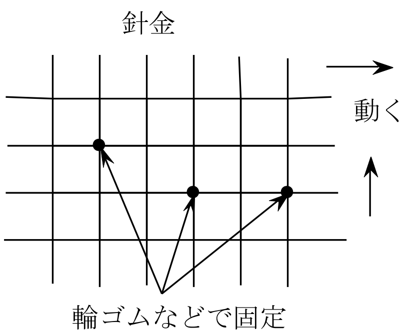
定理　すべての三角形はアフィン合同である

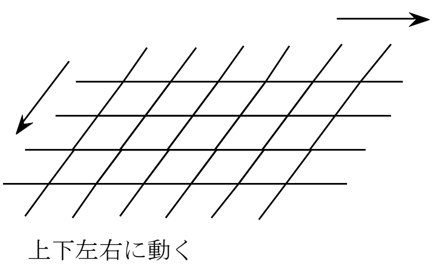
アフィン合同とはアフィン変換に関して合同ということ．アフィン変換とは，これまで述べた，格子平面を斜交平面に変換する１次変換（に平行移動を加えた変換）のことです．

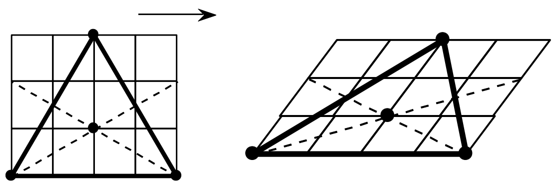
この定理から次のことが導かれます．

三角形のいろいろな性質のうち，アフィン的な性質，すなわち平行性や比に関するものはすべて正三角形で行っておけば，あとはアフィン変換ですべて一般の三角形の上に移せる

例えば，三角形の重心の性質を次のような教具を用いて説明すると納得できます．







ずらしても，中線を重心が２：１に内分していることは不変である．（東京の明星学園中等部の先生のアイデアとのこと）

この教具を使えば，中点連結定理や，平行四辺形の対角線が互いに他を二等分する性質などを，一目で納得することができます．

一次変換と行列式

斜交平面では一次変換をあらわす行列の，行列式の値がわかれば面積が何倍になっているかがわかります．

一次変換と行列式の関係，行列式の図形的な意味について，かつてある学校で，難関大志望者に講習を行ったことがあります．

そこでは，2 次の正方行列と 3 次の正方行列を対比しながら，最終目標を，空間に 4 点が与えられているときの四面体の体積を求めることにおきました．

少し長くなるのですが，参考までにそのときのプリントを紹介します．

【２次の正方行列】

§１　一次変換の意味

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

平面上の点$P(x\ ,\ y)$が行列

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ によって点$Q(x'\ ,\ y')$ に移る

§２　基底の変換

例えば　$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ のとき

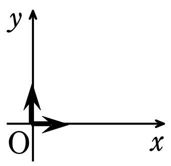
$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

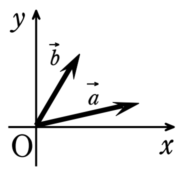
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$　となる。

行列 A は、xy 平面上の基本ベクトル

$\vec{e_1} = (1\ ,0)$ を $\vec{a} = (4\ ,1)$ に、

$\vec{e_2} = (0\ ,1)$ を $\vec{b} = (2\ ,3)$ に移す変換である。





つまり、行列　$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は、

xy 平面上の、原点 O を始点とする大きさ１の
２つの直交する基本ベクトルで作られる
正方形（単位正方形）を、
$\vec{a} = (a\ ,c)$　$\vec{b} = (b\ ,d)$ で作られる
平行四辺形に移す変換である。

【３次の正方行列】

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

空間の点 $P(x\ ,\ y\ ,\ z)$ が行列

$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ によって点 $Q(x'\ ,\ y'\ ,\ z')$　に移る

例えば　$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ のとき

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

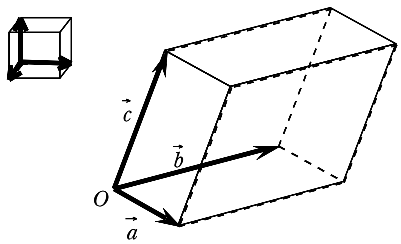
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$　となる。

行列 A は、xyz 空間上の基本ベクトル

$\vec{e_1} = (1\ ,0\ ,0)$　を　$\vec{a} = (2\ ,0\ ,1)$ に

$\vec{e_2} = (0\ ,1\ ,0)$　を　$\vec{b} = (1\ ,1\ ,3)$ に

$\vec{e_3} = (0\ ,0\ ,1)$　を　$\vec{c} = (1\ ,-1\ ,2)$ に移す変換である。



つまり、行列　$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ は、

xyz 空間の、原点Oを視点とする大きさ１の
３つの直交する基本ベクトルで作られる
立方体（単位立方体）を
$\vec{a} = (a\ ,d,g)$　$\vec{b} = (b\ ,e\ ,h)$　$\vec{c} = (e\ ,f\ ,i)$ で作られる
平行六面体に移す変換である。

§３　行列式の定義

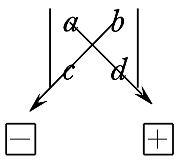
行列　$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ において

$ad-bc$ を行列式という。

これをΔ　$|A|$ などで表す。

つまり　$|A|=ad-bc$ である

行列の計算は次のように行う



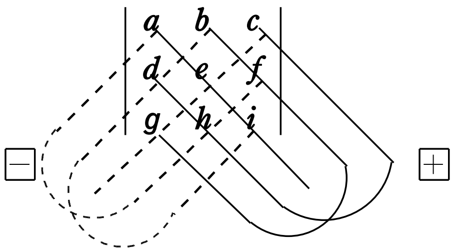
行列　$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ において

$aei+bfg+cdh-(ceg+bdi+afh)$　を行列式という。

これをΔ　$|A|$ などで表す。

つまり　$|A|=aei+bfg+cdh-(ceg+bdi+afh)$　である

行列の計算は次のように行う



§４　行列式の意味

行列式　$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$　の意味は

２つのベクトル

$\vec{a}=(a\,,c)$　$\vec{b}=(b\,,d)$ で作られる

平行四辺形の（符号付）面積である

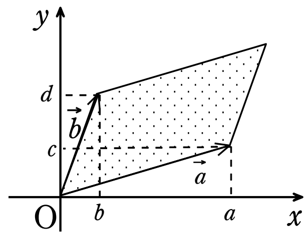
参考

２つのベクトルで作られる平行四辺形の

面積は　$S=\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

$=\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)-(ab+cd)^2}$

$=\sqrt{(ad-bc)^2}=|ad-bc|$



行列式　$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ の意味は

３つのベクトル

$\vec{a}=(a\,,d\,,g)$, $\vec{b}=(b\,,e\,,h)$, $\vec{c}=(c\,,f\,,i)$ で作られる

平行六面体の（符号付）体積である

参考

$aei+bfg+cdh-(ceg+bdi+afh)$ を変形すると

$(dh-eg)c-(ah-bg)f+(ae-bd)i$　となる

このとき　$\vec{n}=(dh-eg\,,-ah+bg\,,ae-bd)$ は

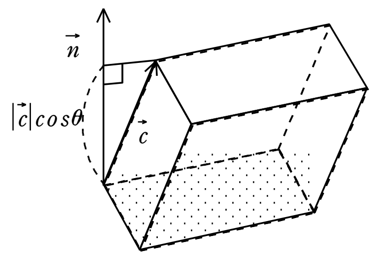
$\vec{a}=(a\,,d\,,g)$, $\vec{b}=(b\,,e\,,h)$ に垂直で、大きさが

$\vec{a}\,,\vec{b}$ で作られる平行四辺形の面積であるベクトルである。

(計算が少し面倒ですが、確かめるのは容易です)

つまり、$|A|=\vec{n}\cdot\vec{c}=|\vec{n}||\vec{c}|cos\theta$　となり、

これは平行六面体の（符号付）体積です。



§５　行列式の性質

★　２次の正方行列 A , B に対して、

$|AB| = |A||B|$ が成り立つ。

（計算をすると容易に確かめられます）

★ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の行と列を入れ替えた行列

$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ の行列式は一致する

（行と列を入れ替えることを転置をとるという）

★　3次の正方行列 A , B に対して、

$|AB| = |A||B|$ が成り立つ。

（計算は面倒ですが確かめられます）

★ $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ の行と列を入れ替えた行列

$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$ の行列式は一致する

（行と列を入れ替えることを転置をとるという）

§６　ベクトル方程式の行列表現

例えば　$\vec{a} = (1\,,2)$　$\vec{b} = (3\,,4)$ のとき

$\vec{a} = 1\vec{e_1} + 2\vec{e_2}$

$\vec{b} = 3\vec{e_1} + 4\vec{e_2}$

なので、これを行列を用いて

$$\begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \end{pmatrix}$$　とかける

この式は、$\vec{a}$, $\vec{b}$ で作られる平行四辺形の面積が、$\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ で作られる平行四辺形の面積（実際は1辺１の正方形）

の $\left| \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \right| = 2$ 倍（つまり２）

であることを示す式である。

また、このとき、$\vec{p} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$

$\vec{q} = -\vec{a} + 2\vec{b}$

と表される点 $P(\vec{p})$, $Q(\vec{q})$ があるとすると

$$\begin{pmatrix} \vec{p} \\ \vec{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{pmatrix}$$ とかける

この式は $\vec{p}$, $\vec{q}$ で作られる平行四辺形の

面積が、$\vec{a}$, $\vec{b}$ で作られる平行四辺形の

$\left| \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \right| = 7$ 倍であることがわかる。

更に $\begin{pmatrix} \vec{p} \\ \vec{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 16 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \end{pmatrix}$

とできるので、面積は　$|66 - 80| = 14$ となる

例えば $\vec{a} = (1\,,1\,,3)$,$\vec{b} = (3\,,2\,,5)$,$\vec{c} = (0\,,1\,,2)$ のとき

$\vec{a} = 1\vec{e_1} + 1\vec{e_2} + 3\vec{e_3}$

$\vec{b} = 3\vec{e_1} + 2\vec{e_2} + 5\vec{e_3}$

$\vec{c} = 0\vec{e_1} + 1\vec{e_2} + 2\vec{e_3}$　　なのでこれを行列を用いて

$$\begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \\ \vec{e_3} \end{pmatrix}$$　とかける

この式は、$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で作られる平行六面体の

体積が、$\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ で作られる平行六面体

の体積（実際は1辺１の立方体）

の $\left| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \right| = 4 + 0 + 9 - 0 - 6 - 5 = 2$ 倍

（つまり２）であることを示す式である。

また、このとき、$\vec{p} = 2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}$

$\vec{q} = -\vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{c}$　　$\vec{r} = -\vec{a} + 2\vec{b}$

と表される点 $P(\vec{p})$, $Q(\vec{q})$, $R(\vec{r})$ があるとすると

$$\begin{pmatrix} \vec{p} \\ \vec{q} \\ \vec{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{pmatrix}$$　とかける

この式は $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ で作られる平行六面体の

体積が、$\vec{a}$, $\vec{b}$ で作られる平行四辺形の

$\left| \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \right| = |0 - 6 - 2 + 2 - 0 - 8| = 14$ 倍

更に $\begin{pmatrix} \vec{p} \\ \vec{q} \\ \vec{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \\ \vec{e_3} \end{pmatrix}$

とできる。

§ 7　いくつかの問題

$\boxed{例}$1

$\triangle OAB$ において、

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{5}$, $\overrightarrow{OQ}=-\vec{a}+2\vec{b}$

で表される点を P , Q とするとき、

$\triangle OPQ$ の面積は△ ABC の何倍か。

$\boxed{解答}$

$$\begin{pmatrix}\vec{p}\\ \vec{q}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{a}\\ \vec{b}\end{pmatrix}$$ より

$|\triangle|=\left|\dfrac{2}{5}+\dfrac{2}{5}\right|=\dfrac{4}{5}$ 倍

$\boxed{例}$2

$A(1 , 2)$, $B(5 , -1)$, $C(3 , 6)$

のとき△ ABC の面積を求めよ。

$\boxed{解答}$

$\overrightarrow{AB}=(4 , -3)$

$\overrightarrow{AC}=(2 , 4)$

$$\begin{pmatrix}\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AC}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{e_1}\\ \vec{e_2}\end{pmatrix}$$ より

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}|16+6|=11$

$\boxed{例}$1

四面体 $OABC$ において

$\overrightarrow{OP}=-\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}$　$\overrightarrow{OQ}=2\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}$　$\overrightarrow{OR}=\vec{a}-3\vec{b}$

で表される点を P , Q , R とするとき、

四面体 $OPQR$ の体積は四面体 $OABC$ の体積の何倍か。

$\boxed{解答}$

$$\begin{pmatrix}\vec{p}\\ \vec{q}\\ \vec{r}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & -3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{a}\\ \vec{b}\\ \vec{c}\end{pmatrix}$$ より

$|\triangle|=|0+3-12-2-0-9|=20$ 倍

$\boxed{例}$2

$A(1 , 2 , 3)$, $B(5 , -1 , 2)$, $C(3 , 6 , 0)$, $D(-1 , 1 , 1)$

のとき、四面体 $ABCD$ の体積を求めよ。

$\boxed{解答}$

$\overrightarrow{AB}=(4 , -3 , -1)$

$\overrightarrow{AC}=(2 , 4 , -3)$

$\overrightarrow{AD}=(-2 , -1 , -2)$

$$\begin{pmatrix}\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AD}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -3 & -1\\ 2 & 4 & -3\\ -2 & -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{e_1}\\ \vec{e_2}\\ \vec{e_3}\end{pmatrix}$$ より

四面体 $ABCD=\dfrac{1}{6}|-32-18+2-8-12-12|=\dfrac{80}{6}=\dfrac{40}{3}$