35　ベクトルの共線条件で注意すること

単元等　数学Ｂ　ベクトル（共線条件）

◆Contents

・ベクトルの矢継ぎ算「暴走ゲーム」

・変位と加法性

・共線条件と同値

・大きさの比較

1　授業の内容

(1)　既習事項の確認（小テスト）

(2)　3 点が一直線上にあるための条件

(3)　図形の問題への応用

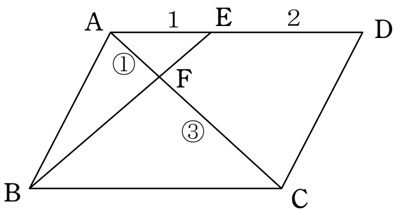
平行四辺形ABCDにおいて

AE:ED＝1:2

AF:FC＝1:3　のとき

3点B,F,E は一直線上にあることを

証明せよ



2　授業を見ての所感

先日は，多忙な中，そして，震災後の過酷な条件の中での授業本当にありがとうございました．

まず，授業の様子を見て，生徒がとても明るく元気良く授業に取り組まれていることが本当に嬉しかったです．

生徒は教師の姿勢を映す鏡といいますが，恐らく，先生の明るく前向きな姿勢が生徒に伝わっているからだと思います．私は，先生の授業から元気をもらうことができました．

先生の授業を見て，良かったと思う点を以下にまとめてみます．

①　よく通るはっきりとした声で説明し，生徒の活動をよく見ていたこと．

②　前時の定着で不十分な問題や，本時の内容に関連する既習事項を取り出して確認テストを実施したこと．

③　作図の大切さを話し，問題文を読み込み各自で作図させてから考えさせていたこと．

④　伸縮する指示棒をベクトルに見立てたり，生徒に黒板上で説明させていたこと．

授業後，先生は「一人でしゃべり過ぎてしまった」と反省しておりました．また，研究会でも，授業がうまくいかなかったとかなり自分を責めていたように拝見しました．しかし，その後のアンケートでは，また授業を観てもらいたいし，他の先生の授業も観たいとの非常に前向きな感想をいただきました．

私自身，授業がうまくいかなかったり，成績が悪いのを生徒のせいにして理不尽に怒ってしまったりして，悔くてやりきれない思いで教室を後にしたことが何度もあります．その度に，ダメさ加減を認めず何とか正当化しようというずるい自分と，もう一度謙虚な気持ちで出直して頑張ろうという自分との葛藤を繰り返していたように思います．また，人の授業と引き比べて自分はなんてダメなんだろうと思ったこともあります．しかし，今思えば，そのような経験が自分の授業力を向上させてきたのではないかとも考えています．

私は，教師にとって，授業力の向上に必要な資質は何かと問われれば，自分に足りないところを素直に見つめ，受け止める純正な心と，今の自分

に満足せず，つねに向上しようという気持ちを持ち続けることではないかと思います．

そういう意味で，先生には授業を向上させる資質がしっかり備わっていると感じました．

今後，試行錯誤を繰り返しながら，頑張って欲しいと思います．

（美味しんぼ「道具の心」より． 料理人の資質と教師の資質は通じるところがあるかも・・・）

3　補足すること

私は，授業を行った先生方に，「所感」を配信していますが，その中に授業内容に関わる教材研究ネタを入れることにしています．それは，授業者の先生への話題提供だけではなく，最終的に県内の先生方への教材研究資料を作ることを目指しています．

そこで，今回はベクトルにからんだ内容を取り上げてみたいと思います．

ベクトルの矢継ぎ算「暴走ゲーム」

ベクトルの加法は，スタート地点からゴール地点を継いでいく「三角形の方法」と，「平行四辺形の方法」の２種類があります．前者は矢を継いでいくので「矢継ぎ算」ともよばれます．これは物体が移動する場合の，変位の状態を見るときの考え方で，後者は，物体に働く「力の合成」といった側面をもっているものだと思います．

（もちろんどちらも同じ結果なのですが）

さて，ベクトルの「矢継ぎ算」を応用した面白いゲームがあり，一時流行したことがあります．このゲームは「暴走ゲーム」といって，アメリカの大学生が考案したものだそうです．

＜暴走ゲームの行い方＞

次ページのようなコースがあります．左上のスタート地点に５つのゲートがあり，好きな地点を１つ選びます．そこから車がスタートし，コースをはみ出さないようにしながらゴールに向かいます．進み方は，以下のルールに従い，矢印１つを１秒と考え矢継ぎ算で行います．

①　最初のベクトルは単位ベクトル（大きさ１）

②　ある時間のベクトルが図１のようなとき，次の１秒後に進める場所は図２の９地点のどこか

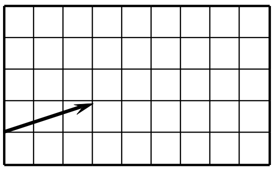


図１

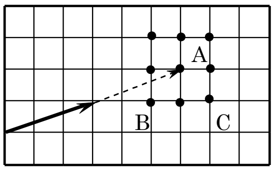
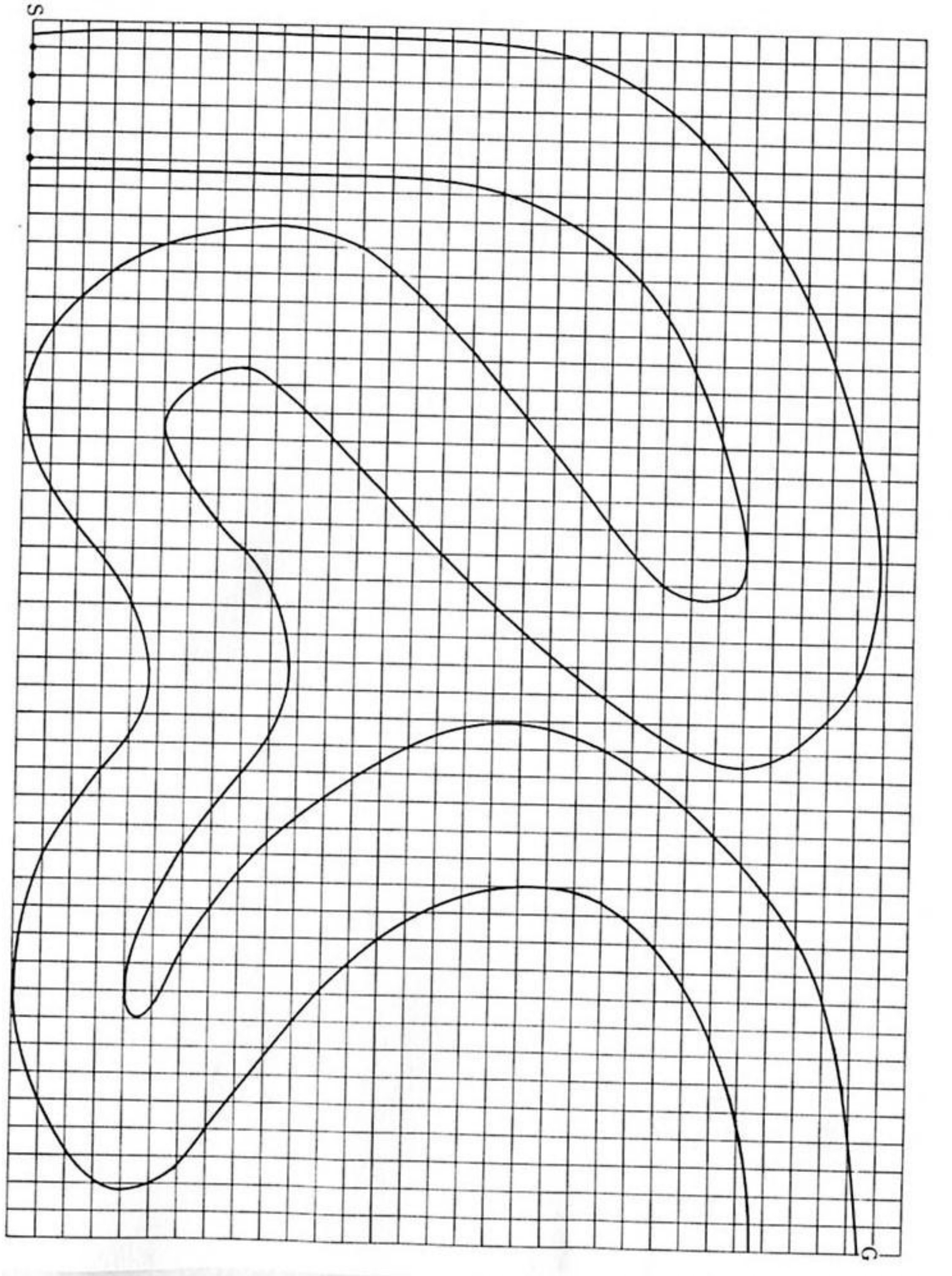


図２

図２のＡ地点は，そのまま等速運動の状態，Ｂ地点はブレーキをかけながらハンドルを右に切った状態，Ｃ地点はアクセルを踏みながらハンドルを右に切った状態などと考えられます．ベクトルの大きさが速さを表しています．車はいきなり速く動いたり，いきなりストップはできないので，上のようなルールが決められているわけですね．

生徒に競争させると結構盛り上がります．

＜暴走ゲーム＞



コースをはみ出さないように注意！スローイン

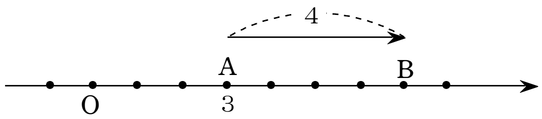
ファストアウトの原則で．30 秒台を出したら凄い

よ！

変位と加法性

数直線上の A 地点に人がいるとします.

今, A 地点から正方向に４だけ移動するとどこに到達するでしょう.



３＋４＝７

つまり, 図の B(7)地点になることがわかります.

ここで行われている計算は加法ですが，細かくいうと,**（最初の地点）＋（変位）＝（終りの地点）**という考え方になっています.

さて，更に B 地点から正方向に２進んだということになると，**３＋４＋２＝９**　となります.

記号で書くと，**OA＋AB＋BC＝OC＝９**　です.

これはベクトルの矢継ぎ算にあたります.

今度は，少し別の問題を考えてみます.

「A 君が 7 時から 3 時間勉強しました. 何時まで勉強したでしょう」

７＋３＝１０　（10 時）

やはり加算によって考えることができます.

ここでは，合併としての加算ではなく，

（過去の状態）＋（変位）＝（現在の状態）

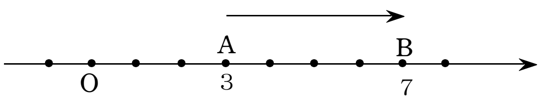
あるいは

（現在の状態）＋（変位）＝（未来の状態）

というタイプの加算であることに注意して下さい.

このような加算はベクトルの加法と同じ考え方といえます.

では，次の場合はどうでしょうか.



A 地点にいた人が，B 地点に移動しました．A から B へ移動した量（変位）はいくらでしょう.

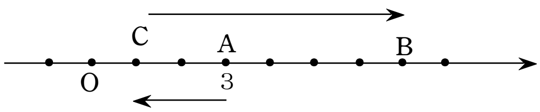
７－３＝４

今度は，引き算によって変位が求められました.

ここでの引き算は,

（終りの地点）－（最初の地点）＝（変位）

という形です.



もし, A から C 地点を経由して B 地点までいったとしても，移動した動きの総量であれば

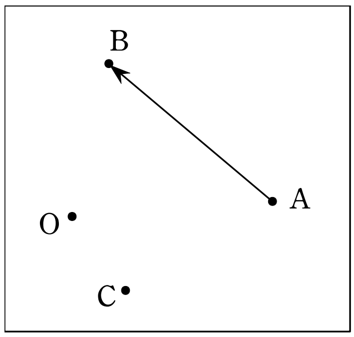
AC+CB=2＋6＝8 となるのですが，A から B への変位であれば４と変わりません.

つまり，変位は途中の寄り道に拘わらず，常に

（終りの地点）－（最初の地点）

を考えればいいことになります.

今度はこの変位を，数直線上から，次元を上げて平面上（空間上でもよい）の移動を考えてみましょう.



今，ある人が A 地点から B 地点に移動したとします．今度は平面なので，変位は**移動距離と移動の方向**という２つの変量があるので，ベクトルで考えることになります.

数直線では,

（終りの地点）－（最初の地点）＝（変位）

でしたが，今後は

（終りの位置ベクトル）－（最初の位置ベクトル）＝（変位ベクトル）　となります.

つまり，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$　ということですね.

また，基準点を０にする必要はないので,

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$ などとしてもいいわけです.

　このように，

（終り）－（最初）＝（変位）

という概念は高校ではベクトルだけでなく

微分（変化率）や積分（定積分）にも現れます．

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{\overbrace{f(x)-f(a)}^{y\text{の変位}}}{\underbrace{x-a}_{x\text{の変位}}}$$

差分で変位を求める考え方は，加法より高度な概念なので，小学校から少しずつ「刷り込んで」い

$$\int_a^b f(x)dx=\overbrace{F(b)-F(a)}^{\text{終り}-\text{最初}}$$

くことが必要かもしれませんね．

（最初）＋（変位）＝（終り）

（終り）－（最初）＝（変位）

　を統一的に考えるために，ベクトルでは，次の３つ（４つ）の約束を決めます．

Ⅰ　AA=0

> 3点A , B , C が一直線上にある
> $\Leftrightarrow$　$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$　となる実数k が存在する．

Ⅱ　AB=-BA

Ⅲ　AC=AB+BC

（Ⅳ　AB=XB-XA）

ⅣはⅡⅢから計算によって導かれる性質でありますが，できれば計算によって辿りつくのではなく自然にイメージさせたいところです．

共線条件と同値

　3 点が一直線上にある条件（共線条件）とは次のようなものです．

　この定理を用いる際，留意すべき点は同値性です．生徒は，往々にして，文章に書かれてある順に解釈していくので，この定理を頭から読んで

「3 点 A, B, C が一直線上にあるならば $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ とおける」

　としてしまいがちです．

正しくは**「3 点 A, B, C が一直線上にあることと $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ とおけることは同値」**

あるいは

「3 点 A, B, C が一直線上にあるならば $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ とおける．また，逆に $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ とおけるならば 3 点 A, B, C が一直線上にある」

としなければなりません．

　まずいのは，**「3 点 A, B, C が一直線上にあるならば $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ とおける」ことを示して，**

だから**「 $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ とおけるならば 3 点 A, B, C が一直線上にある」**と逆を自明にしてしまうことです．

　実際，図形の問題で共線条件を使うのは，逆側の形**「 $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ とおけるならば 3 点 A, B, C が一直線上にある」**の方です．ですから，そこの説明をしておかないと，証明の中で，どこで共線条件が効いているかがわからないということになってしまう可能性があります．

　ちなみに，逆は， **$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ のとき，**

$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ は<u>平行である</u>ことと，<u>始点が一致していること</u>から 3 点 A, B, C は共線であることが示されます．生徒は意外にとまどうので，

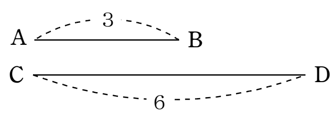
$$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC},\quad \overrightarrow{AC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB},\quad \overrightarrow{AC}=-\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$$

　などの場合の A, B, C の位置関係を見つける練習をしてみるのがいいのではないかと思います．

大きさの比較

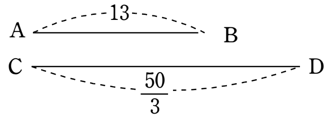
　図において

線分 CD は線分 AB の何倍でしょうか．



これは見ただけで 2 倍とわかります．

では次の場合はどうでしょう．



これはちょっと嫌ですね．求め方としてよくあるのは次の２つではないかと思います．

＜解１＞比例式

$AB:CD=13:\frac{50}{3}$ より

$\frac{50}{3}AB=13CD$

$CD=\frac{50}{39}AB$

よって，CDはABの$\frac{50}{39}$倍

＜解２＞未定係数

AB をx倍してCDになると考える．

$13x=\frac{50}{3}$　より

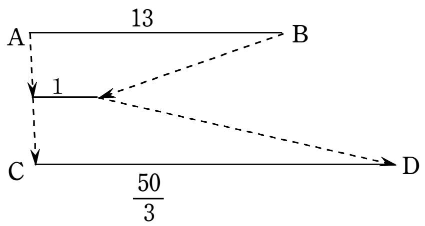
$x=\frac{50}{39}$

よってCDはABの$\frac{50}{39}$倍

もちろんこれでいいのですが，私はもう一つの別の考えを推奨したいと思います．

それは，「基準の値（例えば１）に縮めて（伸ばして）から伸ばす（縮める)」という手法です．

＜解３＞縮めて伸ばす



① ABの大きさを１にする　$\frac{1}{13}AB$

② これを$\frac{50}{3}$倍する　$\frac{50}{39}AB$

③ これがCDであるから$\frac{50}{39}$倍である

例えば，$\vec{a}$ と同じ向きで大きさが５のベクトルを求めよ，という場合次のように考えていきます．

$\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$　…自分自身の大きさで割る（この瞬間大きさ１）

$\frac{5}{|\vec{a}|}\vec{a}$　…それをゆっくり5倍する（大きさは5となる）

ベクトルではこのように大きさを１に戻すことを「正規化する」といいます．

いくつか問題をやってみましょう．

① $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\vec{d}-\vec{b}$, $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{4}\vec{d}-\frac{3}{4}\vec{b}$ のとき

B,E,Fが一直線上にあることを示せ．

解答

$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\vec{d}-\vec{b}$

$3\overrightarrow{BE}=\vec{d}-3\vec{b}$ ……3倍した

$\frac{3}{4}\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\vec{d}-\frac{3}{4}\vec{b}$ ……$\frac{1}{4}$倍した

よって$\overrightarrow{BF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BE}$　となるので

B,E,Fが一直線上にある．（示した）

※ $\vec{d}-3\vec{b}$ を規準に考えたわけである

② $\vec{a}=(17,34)$ に平行で大きさが５のベクトル$\vec{x}$ を求めよ．

解答

$\vec{a}/\!/\vec{x}\quad\Leftrightarrow\frac{1}{17}\vec{a}/\!/\vec{x}$ である

$(1,2)$……これを基準に出発

$\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$ ……正規化（この瞬間大きさ１）

$\frac{5}{\sqrt{5}}(1,2)=(\sqrt{5},2\sqrt{5})$ …大きさが５となった

$\vec{x}=(\pm\sqrt{5},\pm2\sqrt{5})$（複号同順）…逆向き考慮

私はこのような解法を「そっくりさん作戦」といっています．