33　数Ⅱで教える区分求積の考え

単元等　数学Ⅱ　積分の導入

◆Contents

・区分求積について

・$\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ の公式について

1　授業の内容

(1)　数学史から求積の流れを見る

(2)　微積分学の基本定理の説明

(3)　不定積分の定義

2　授業を見ての所感

先日はお忙しい中，個別訪問で授業を見せていただきありがとうございます．

今回の授業から，先生が教材研究を深く行っていることと，それによって得た，広い知識を自分のものにしながら，オリジナリティを感じる授業を行っていたことに感心いたしました．

具体的に，良かったと思う点は

①「積分」の意味や概念を生徒との対話の中で丁寧に導き出していたこと．特に，冒頭で「積分」という言葉からのイメージを生徒に言わせる中で「掛け算」「足し算」「面積」という言葉を引き出し！それらを活かしながら授業を展開していったことは素晴らしかった．

②区分求積と積分の関係を，積分のルーツであるアルキメデスの取り尽し法や測地学と積分の関係など，様々なエピソードを交えながら，数学史の話題を，豊富なスライドにより楽しそうに生徒に示していたこと．

③区分求積を，PC によるグラフィクスを上手に用いて，分割が細かくなれば一定の値に収束していく様子をイメージさせていたこと．

などです．

今回の授業を拝見して，先生の「数学」と「授業技術」両面にわたり真摯で意欲的な姿勢を感じることができました．何よりも，先生の熱意が生徒にしっかり伝わっていたことが一番だったと思います．

先生も述べていたとおり，準備していた内容のすべて説明できなかったことや，演習等の技能を評価する時間がなくなったことなど，反省点はあるかと思いまが，「準備・授業・反省（評価）」の全面にわたり，多くの教師に観てもらいたい，模範となる授業だったのではないかと思います．

3　補足すること

私は，授業を行われた先生に，所感とともに，授業の内容に関係する教材研究ネタを作成しています．これは，授業者に配信するとともに，最終的には県内の先生方へ向けた教材研究集を作成することを目的としています．

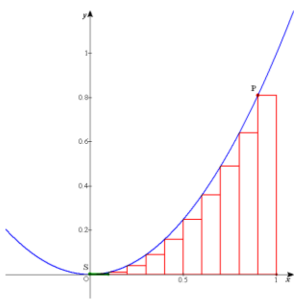
今回は，区分求積や積分についていくつか述べてみようと思います．

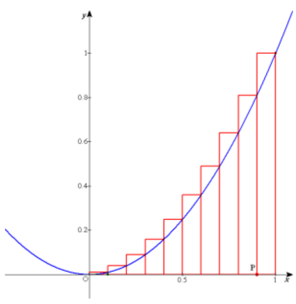
$y=x^2$ の区分求積

先生が授業でやられたように，$y=x^2$ の区分求積を用いて，分割を細かくすると帯状部分の面積の総和が一定の値に収束していく様子を眺めてみましょう．

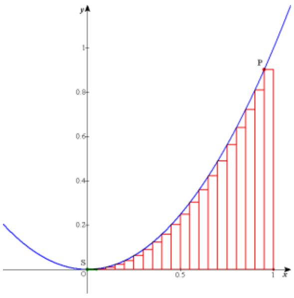
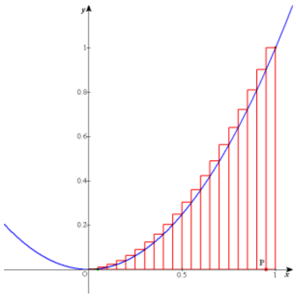
＜左端区分求積＞　　＜右端区分求積＞

◆　分割数 10　左端 0.285　右端　0.385

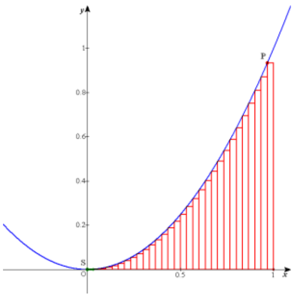
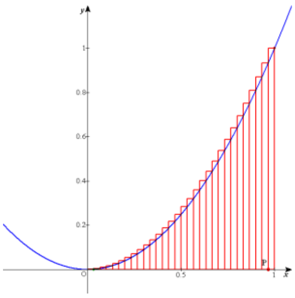




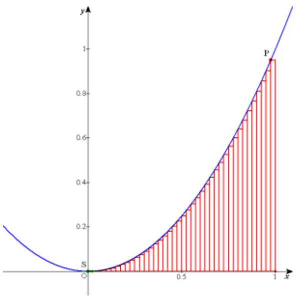
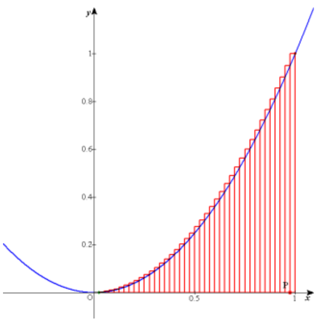
◆　分割数 20　左端 0.30875　右端　0.35875

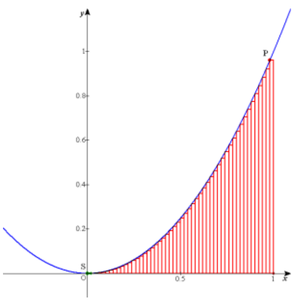
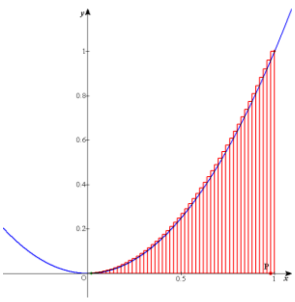
◆　分割数 30　左端 0.31685　右端　0.35019

◆　分割数 40　左端 0.32094　右端 0.34594

◆　分割数 50　左端 0.32340　右端　0.34340

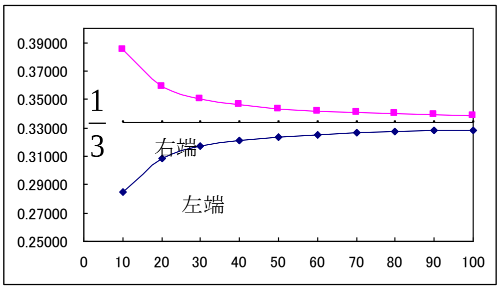



分割数を大きくしていくと，帯の部分で作られた階段状の図形は，だんだん滑らかになっていくように見えます．一次変換をネコによって表現するというユニークな手法を考案された小沢健一先生（元東野高校校長）という方は，微分のことを**「丸い地球も住むときゃ平ら」**，そして積分のことを**「階段も幅が狭けりゃ滑り台」**と表現されています．本質をついたキャッチフレーズですね．

さて，分割が増えるとき，帯状部分の面積が変化する様子をグラフにしてみると，下のようになります．

回数	左端区分求積	右端区分求積
10	0.28500	0.38500
20	0.30875	0.35875
30	0.31685	0.35019
40	0.32094	0.34594
50	0.32340	0.34340
60	0.32505	0.34171
70	0.32622	0.34051
80	0.32711	0.33961
90	0.32780	0.33891
100	0.32835	0.33835

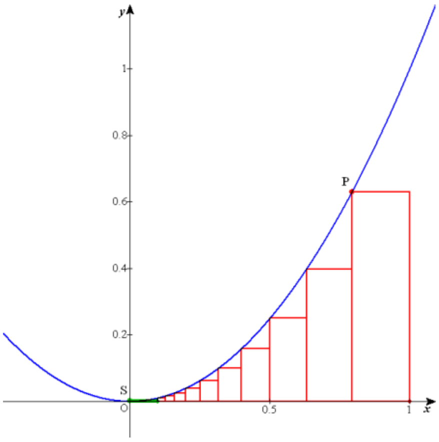
（10 等分から 100 等分まで）



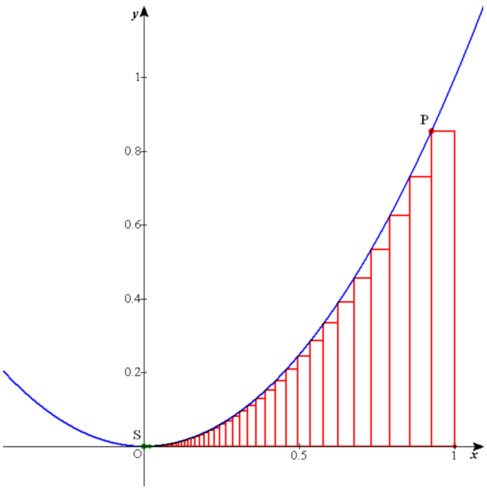
右端の方は単調に減少しながら，左端の方は単調に増加しながら，きれいに，$\dfrac{1}{3}$ に近づいていく様子がわかります．

分割は必ずしも等分割でなくてもかまいません．次の図は，分割の幅が等比数列になるようにしたものです．

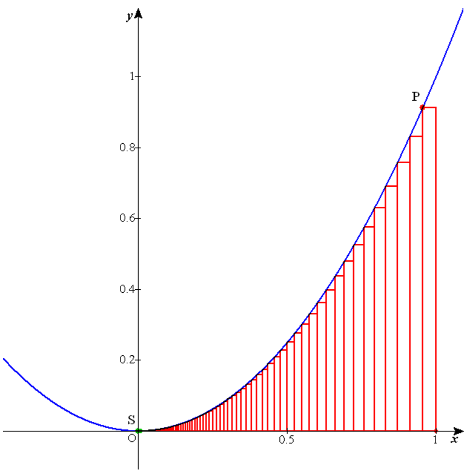
◆　**等比分割（初項 0.1，末項 1 になるような等比数列で 10 等分）　面積　0.2599**



◆　**等比分割（初項 0.02，末項 1 になるような等比数列で 50 等分）　面積　0.30762**



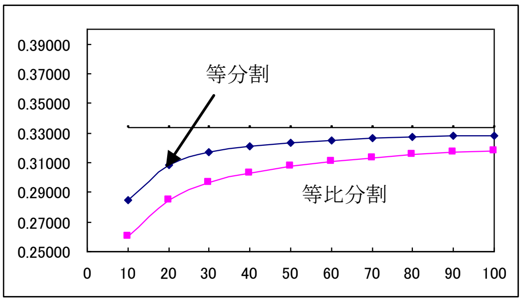
◆　**等比分割（初項 0.01，末項 1 になるような等比数列で 100 等分）　面積　0.31811**

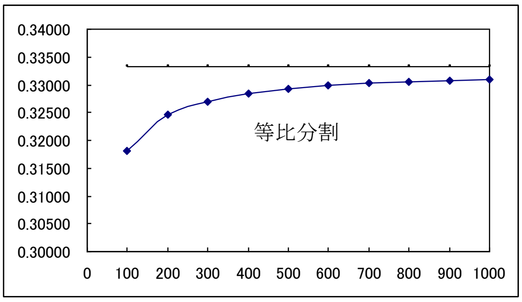


◆　等比分割と等分割の比較

分割数	等分割	等比分割
10	0.28500	0.25990
20	0.30875	0.28479
30	0.31685	0.29632
40	0.32094	0.30310
50	0.32340	0.30762
60	0.32505	0.31086
70	0.32622	0.31332
80	0.32711	0.31525
90	0.32780	0.31681
100	0.32835	0.31811

分割数	等比分割
100	0.31811
200	0.32454
300	0.32702
400	0.32835
500	0.32920
600	0.32979
700	0.33022
800	0.33055
900	0.33082
1000	0.33103





等分割より収束は遅いのですが，確かに，

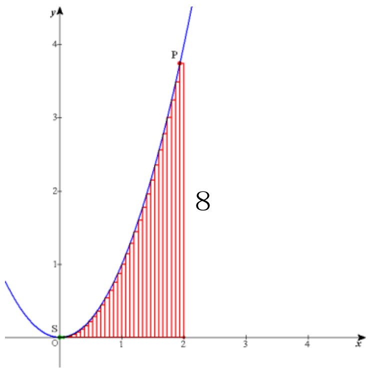
$\dfrac{1}{3}$ に近づいていく様子がわかります．

区分求積とは，区間を**「分割する」**こと，**「タテ×ヨコ」**の計算で，長方形の帯の面積を求めること，そして，それらを区間内で**「足しまくる」**という３つの考えによって説明されるものであることがわかります．そして，分割は必ずしも等分割である必要はなく，区間の幅が０に収束していくような適当な分割Δに対しても一定値に収束していく極限値が存在するとき，それを面積とするのが面積の数学的定義です．

「分割」を「割り算」の概念と見れば，区分求積（定積分）には，先生の授業で，生徒が「積分」という言葉からイメージした「割り算」「足し算」「掛け算」「面積」が全部入っていることがわかります.

更にいうと，定積分は，原始関数の区間内の変位になるので，「引き算」も登場します．積分は，まさに数学の演算の総合芸術ともいうべきものですね.

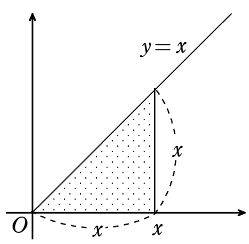
さて，更に $y=x^2$ と x 軸で囲まれた図形の面積を考えてみましょう.



上図は，０から２までの区間での区分求積を行ったもの（30 分割）です.

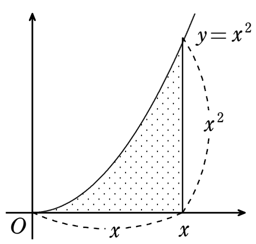
分割数を増やしていくと，2.6666･･･つまり，$\dfrac{8}{3}$ に近づいていくことがわかります.

このことだけから一概に言えませんが，三角形は**「底辺×高さ÷２」**，放物線と x 軸で囲まれた図形の場合は**「底辺×高さ÷３」**と予測できます.



面積は底辺×高さ÷２

$S=\dfrac{1}{2}x\times x=\dfrac{1}{2}x^2$



面積は底辺×高さ÷３

$S=\dfrac{1}{3}x\times x^2=\dfrac{1}{3}x^3$

そんなところから，面積を考えるためには，微分の逆演算を考えれば良さそうだということで，積分を学ぶ動機付けを行ってみるのも一つの手であるかと思います.

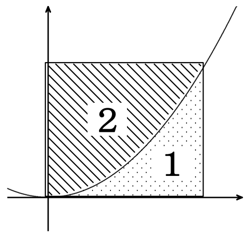
（実際，微積分学の基本定理の（弱い）証明は，定積分で面積の話をするときに行えば良い）

放物線と長方形の面積比

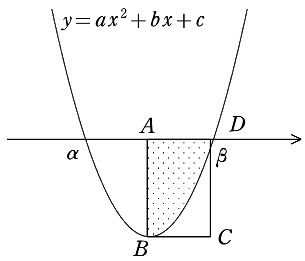
放物線は図のように，長方形を２：１の面積比に分ける曲線であることを利用して，

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$



を示してみたいと思います.



上図において

$AD=BC=\dfrac{\beta-\alpha}{2}$ なので

$CD=a\left(\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right)^2$ $(a>0)$

よって$\square$ABCD$=a\left(\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right)^3$

すると，打点部分の面積を$\dfrac{S}{2}$ とすると

$$\frac{S}{2}=a\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3\times\frac{2}{3}=\frac{a}{12}(\beta-\alpha)^3$$

$S=-a\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx$なので

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$