29　対数法則と上手につきあうには

単元等　数学Ⅱ　対数関数

◆Contents

・反射律／対称律を用いて対数法則を見る

・身近にある対数法則

（フェヒナー・ウェーバーの法則）

1　授業の内容

(1)導入（対数の性質の確認）

【対数の性質】

$a>0$，$a\fallingdotseq 1$，$M>0$，$N>0$ のとき

【１】$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

【２】$\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

【３】$\log_a M^r=r\log_a M$

(2)対数の公式を利用した問題演習

2　授業を見ての所感

先日は，個別訪問での授業ありがとうございました．対数の性質を利用した問題演習の場面だったので，公開授業としてはやりにくかったかもしれませんが，丁寧に指導され，生徒も理解できていたのではないかと思います．また，授業の展開例だけでなく，教材観や生徒観，観点別の評価規準まできちんと書かれた指導案を作っていただきました．お忙しい中ご苦労をおかけいたしました．

今回の訪問で感心したことが２つあります．一つは，生徒が予習をしっかり行っていること，もう一つは，数学科職員が研究会に全員集まって，議論してくれたことです．

学力向上・授業力向上を目指すには，とても良い環境であると確信いたしました．

3　補足すること

私は，個別訪問で授業を実施された先生に対して，感想と教材研究のネタなどを提供させていただいております．

今回は，対数について少し述べてみたいと思います．

反射律・対称律を用いて

例えば，$\log_2 6$とは，「６を，２を底として考えたときの指数」という意味を持ちます．つまり，

$6=2^{\log_2 6}$　ということですね．

しかし，今回の授業は，対数の性質を利用して，logを１つにまとめる練習を行うという場面だったので，そこでは，意味を一度捨て去り，３つの性質だけを使って形式的に変形していくという過程を踏むのが一般的かと思います．

（先生も，「３つのアイテムだけを使っていろいろな問題に対処する」と話をされていましたね）

数学において有意味学習は大切なことですが，数学の良さの一つとして，意味を考えずに，一定のアルゴリズムによって，自動的に解答を導いていけるということも大切です．（ただ，そのアルゴリズムや解法パターンを覚えることや，公式にあてはめるだけを目的とするような，「意味を放棄した」授業が行われていることは問題だということはいろいろな場面で指摘しているところです）

というわけで，ここでは「３つの公式」をうまく適用させる，いわばパズル的な考え方を行うわけですが，それにあたって，一つ補足をしておこうと思います．

例えば，logの計算の性質

【３】$\log_a M^r=r\log_a M$

を説明する場面において，

「肩に載っている数を前に下ろすことができるルール」と左辺から右辺に向かう「操作」として説明（意味づけ！？）する先生が多いと思います．

ところが，実際に問題を解く場面では，

$\frac{1}{2}\log_2 16 = \log_2 16^{\frac{1}{2}}$　のようなとき，

「前についている係数を肩に乗っけることができるから」と，知らないうちに逆操作を自明にしてしまっている場面をしばしば見ます．

「等式」を左辺から右辺を導く「操作」として説明してしまうことでの混乱といえそうです．

一般に，２つの数が等しいとき，等号「＝」によって，A=B と表現されるわけですが，等号で表される「関係」には，次の３つの性質があります．

① A=A　（反射律）

② A=B　ならば　B=A　（対称律）

③ A=B，B=C　ならば　A=C　（推移律）

今，「対称律」を考えれば，対数の３つの性質

【対数の性質】

$a>0, a\neq 1, M>0, N>0$ のとき

【１】$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

【２】$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

【３】$\log_a M^r = r\log_a M$

は，

【対数の性質】

【１】$\log_a M + \log_a N = \log_a MN$

【２】$\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$

【３】$r\log_a M = \log_a M^r$

と見ることもできます．

対数の性質を示す公式を「操作」と指導するならば，上の３つもセットにしてあらかじめ示しておくことが必要であると思います．

また，log の計算では，反射律　A=A も意外に役に立ちます．

２つの例を示しておきたいと思います．

$\boxed{例}$１

$\log_a b = \log_a b$　（反射律）

定義　$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$　から

$a^{\log_a b} = b$

（例えば，$\log_2 6$ の意味を忘れたとき

$\log_2 6 = \log_2 6$　から　$6 = 2^{\log_2 6}$ とわかる）

$\boxed{例}$２

$\log_a b \cdot \log_a c = \log_a b \cdot \log_a c$　（反射律）

$\log_a b \cdot \log_a c = \log_a c \cdot \log_a b$　（交換則）

$\log_a c^{\log_a b} = \log_a b^{\log_a c}$　（性質【３】）

$c^{\log_a b} = b^{\log_a c}$　（真数の比較）

これは一種の底の変換公式である．

例えば

$9^{\log_3 5} = 5^{\log_3 9} = 5^2 = 25$

などとすぐわかる便利な公式である．

身近にある対数法則

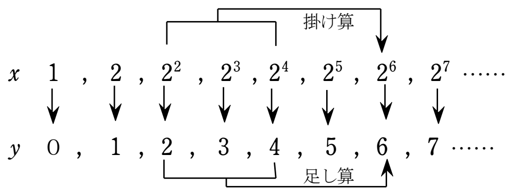
フランスの若き天才数学者で，決闘によって 20 歳の生涯を閉じたガロアには次のような有名なエピソードがあります．

ガロアが高等理工科学校に入校するための面接試験において，面接官が「対数とは何か」という質問をしたところ，彼は次のように答えた．

「対数とは，等比数列 $1, a, a^2, a^3, \cdots$　から，等差数列　$0, 1, 2, 3, \cdots$ の各項への対応であり，a はその底である．更に，等比数列の各項をどんどん分割して指数関数から１次関数への対応にすることができる」

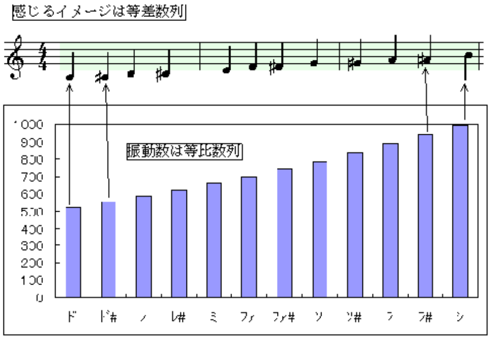
この答えに対して，少々嫌味な面接官が突っこみを入れたところ，ガロアはブチ切れてしまい，黒板消しを彼の頭に命中させてしまった．

つまり，ガロアが言うには，指数関数を１次関数にするような対応が対数というわけです．



さて，ではこのような対数法則が成り立つような身近な例として「人間の感覚」をあげておきたいと思います．

例えば，音の高低を考えてみましょう．音が聞こえるということは，空気の振動が鼓膜を刺激するからです．1 秒間の振動数が大きければ音は高く，振動数が小さくなれば音は低く聞こえます．
下の楽譜はドから半音ずつ上がっていく音階です．



ドの振動数は 524Hz，ド$^{\#}$の振動数は 555Hz なので，31Hz 増加しています．

また，ラ$^{\#}$の振動数は 938Hz，シの振動数は 994Hz なので 56Hz の増加になっていて差は一定ではありません．実際，ドレミファの音階（平均率）は，
半音上がるごとに振動数が 1.06 倍される等比数列になっているのです．

それなのに，私たちは，ド→ド$^{\#}$も，ラ$^{\#}$→シも同じ半音の変化として，同じ高さの階段を一段上がるようなイメージで音階の変化を感じています．

心理学に「フェヒナー・ウェーバーの法則」というものがあります．それは，

感覚の強さは刺激の対数に比例する，つまり

感覚＝k log（刺激の強さ）

という式で表されます．

例えば，ローソクの明かりが 1 本から 2 本に 1 本増えたとき，それを見たときの感覚は，100 本から 101 本に増えたときよりも大きいはずです．フェヒナーによれば，**刺激によって変わる反応の変化率は，現在の刺激の量に反比例する**ということで，次のような微分方程式で定式化しました．

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{k}{x}$　（x は刺激の量．y は刺激から得る感覚．感覚の変化率は刺激に反比例するという式）

この微分方程式を解くと確かに，
$y=k\log x$ という対数関数になりますね．

刺激がある程度を越すと，それを分析して受け止める能力がだんだん限界になっていくというイメージを持ってみてもいいかもしれません．

対数とは，掛け算を足し算に，割り算を引き算に対応させることなので，大きな数の計算や，微小な世界での計算がとても楽に行えるわけです．

16 世紀，ケプラーの法則が確立され，天文学で大きな数値の計算を行う必要がでてきました．何とか積や商の近似計算ができないかという機運が高まる中で，ネイピア（やビュルギ）によって対数が発見されました．必要の母だったわけですね．

ケプラーは「対数のおかげ計算の労力が半分になったので，天文学者の寿命が 2 倍になった」との言葉を残しています．

COFFEE　BREAK 15

授業力向上セミナー
すうがく通信 20 号より

今年度の授業力向上セミナー（高校）は，下記の日程で行われました.

◆　7 月 1 日（金）　中部地区　花巻北高校
　三上浩永先生　参加者　中学校 5 名　高校 20 名

◆　7 月 11 日（月）　県南地区　一関工業高校
　宮本次郎先生　参加者　中学校 5 名　高校 20 名

◆　8 月 25 日（木）　盛岡地区　盛岡一高
　田鎖伸也先生　参加者　小 1・中 5 名高校 26 名

◆　9 月 29 日(木)　県北地区　福岡高校
　佐藤宣昌先生　参加者　中学校 1 名　高校 18 名

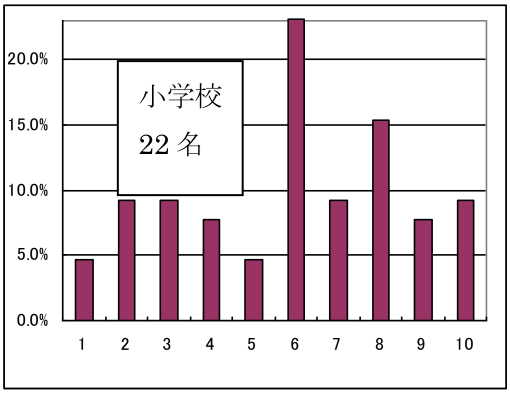
授業者の先生，そして，当該校の校長先生，数学科の先生方，会場提供や準備ありがとうございました．紙面上ではありますが，あらためてお礼申し上げます.

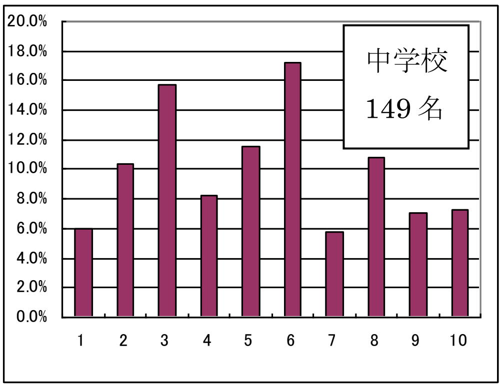
さて，セミナー参加者にお願いしたアンケートに，次の項目があります.

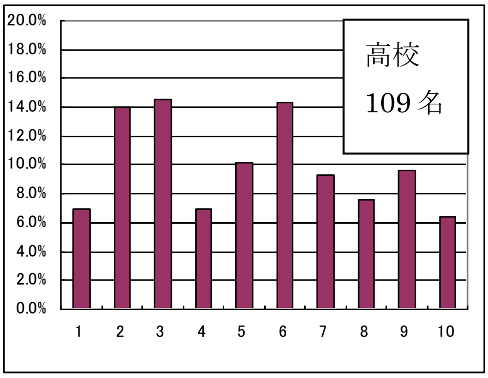
次の「分かりやすい授業」を目指した具体的取り組み【１０のポイント】のうち，本日の授業及び研究会から，今後特に考えていきたい項目を３つ選び〇印をつけてください.

	項目
1	『目標の設定』を行うこと。
2	『充実した教材分析』を行うこと。
3	『生徒の実態を踏まえた展開案』を作成すること。
4	『本時で学習することの価値や有用性』を理解すること。
5	『学習課題の把握』をしっかりさせること。
6	『生徒一人一人の考えを生かした授業』にすること。
7	『新しい概念・原理の理解』をさせること。
8	小中『定着の時間確保』がなされていたか。 高『吟味した発問』がなされていたか。
9	『構造的な板書』にすること。
10	『適切な自己評価』をさせるための指示を出すこと。 ⇒授業と連動した家庭学習

中学校会場 6 校分も含め，すべてのセミナー参加者から校種別に回答をまとめると次のグラフのようになりました.







高校では，**「2. 充実した教材分析を行うこと」**を考えていきたいという傾向が強く，小中学校では**「6. 生徒一人一人の考えを生かす」**ことに力点を置いていることがわかります.