

27 三角関数は「関数」である

単元等 数学Ⅱ 三角関数／指導法

◆Contents

- ・数学科としての組織づくり
- ・三角比の再定義に関する問題意識
- ・三角関数は「関数」である
- ・加法性を持つ量としての角
- ・具体的問題への対応

1 授業の内容

- (1) 三角関数を含む方程式を解く
- (2) 三角関数を含む不等式を解く

2 授業を見ての所感

先日は個別訪問での授業ありがとうございました。先生の授業を拝見して感心したことは、授業開始時の小テスト、終了時の授業アンケートを毎時間行い点検し、それを生徒の評価や授業の改善に役立てていることです。

もっと具体的にいうと、学習習慣をつけるための取り組みとして、授業⇒授業アンケート⇒宿題⇒小テスト⇒単元テストのサイクルを確立させ、定着度や生徒の理解の様子を適宜確認しながら授業を進めていることがとても素晴らしいことだと思いました。

このような取り組みを継続させることは大変だろうと思います。できれば、数学科が共通理解して、学年や学校全体で、先生が行われているような取り組みを広めていく流れが生まれていけば大きな飛躍が期待できるのではないかと思います。

私は、この2年間青森県の学校に勤務していましたが、数学科の教員がベテラン揃いで（私も含めて！）、その良さはもちろんありましたが、問題点も多く感じたため、次のようなことを提起しました。

参考になるかどうかはわかりませんが、紹介いたします。

教科指導を含め、様々な教育活動の成果は、教師の指導力と生徒の主体性に依存する。

しかし、教師個々の指導の集積だけに頼る指導には限界がある。「個の力量に頼る」だけの指導についての問題点を以下に述べる。

- ① 指導の計画性・継続性がなく場当たりになる。
- ② 年度ごとに指導の理念や、指導法がぶれる
- ③ 「昔とった杵柄」「前の学校ではこうやってうまくいった」という名の下、時代や生徒の変化への対応が鈍かったり、若い人のフレッシュな発案が埋もれてしまう。
- ④ 良い実践や成果が全体のものにならない。また、長期的なものにならない。

(2010年 八戸西高 進路SSS会議資料より)

このようなことを提起し、数学通信を発行したり、学年全体で問題のデータベース化を図ったり、岩手や北海道から先生を呼んで授業研究会を開いたりしました。微力ですが、少しずつ良い方向に変化していったのではないかと感じています。

これからは特に、個の力量の集積から、チームとしての戦略を持つことが、学校全体の学力向上には不可欠ではないかと思えます。

先生が行っている取り組みを共通理解するような場を設定するのが簡単ではない場合は、まず、先生の取り組みを積極的に「発信する」働きかけを行うことから始めるのもよいのではないかと思います。例えば、生徒の感想からピックアップして、数学科の先生に見てもらおうとか、授業記録を作って発信するとかです。教科指導だけでなく、若い先生が動くことで、生徒や職員の意識を変えていくことが、これからの学校経営には必要ではないかと私は考えています。

是非、これからも生徒との対話や、生徒の「声」を励みにして頑張ってください。

3 補足すること

私は、授業者の先生に「所感」とはいいながら、授業ネタや教材研究の材料を提供させていただいております。今回は、三角関数について、個別訪問を行う中で、多くの学校の先生に共通する話題を取り上げてみたいと思います。

■ 三角比の再定義に関する問題意識

先日、ある高校のA先生から次のようなメールを受け取りました。

どの教科書も鈍角の三角比を教える段になると、鋭角のときまでの具体的な直角三角形の辺の長さではなく座標平面上の上半円周上に座標を取って、動径と座標を利用して三角比を定義し直します。無論、それが正当な定義の仕方ではあるわけですが、この定義の変更が生徒にとっては具体から抽象への第一歩となり、三角比を訳の分からないものにしてしまっているということを長年感じてきました。(以下略)

確かにA先生のような問題意識(具体から抽象への第一歩という認識)を持つ先生はとても多いのではないかと思います。そこで、実際に授業を拝見すると、単位円を使わずに三角関数を導入してしまうものや、単位円に有名三角形(2:1: $\sqrt{3}$ や1:1: $\sqrt{2}$)を埋め込んで説明しているだけのものなどに遭遇することがとても多いのです。

恐らく難しい概念を回避し、生徒にわかりやすく教えたいということで考え出したものかもしれません。しかし、私は、このような授業は、本質を教えず、とりあえず目の前の困難を先送りに行っているだけのような気がします。ですから、先に行けば行くほど、分からなさは深刻になってしまっているのではないかと思います。

私が以前勤務していた学校で、地歴のある先生が、こんな話をしました。

「三角関数はそれまで全然わからなかったけれど、ある先生が単位円で教えてくれたら、なあんだこんなに簡単なことだったんだと、いっぺんにわかって感動した経験がある。」

その先生は、具体的には、角度とは、単位円上を動く点の、ある基点からの弧の長さと考えることで「すべてが見通せた」といっていました。

そうです。私たちが教えるべきはこのような概念だと思います。しかし、実際は、「どうせ30°や45°に関わる問題しか出ないからとりあえずその2つの三角形を覚えておけば何とかなる」的な発想で逆に授業をつまらなくしているということも言えるのではないかと思います。

■ 三角関数は「関数」である

文字通り、三角関数は「関数」であります。では、関数とは何であるか。

「関数」という言葉は中学校2年生で登場します。教科書には次のように関数の定義が述べられています。

「ある量とそれともなうて変化する他の量があり、それぞれを変数 x, y で表す。 x の値を決めると、それにつれて y の値もただ1つに決まるとき、 y を x の関数であるという。」(東京書籍「新しい数学2年」傍点部分は筆者)

少し、補足すると、中高で扱う関数は、実数から実数への対応であること(複素関数は大学で)と、ほとんどが連続関数であるということです。

例えば、 $y = \sin x$ を扱う場合、弧度法を用いずに、いくつかの角に対するサインの値を求め、それを座標平面にプロットして、それらを滑らかな曲線をつないでグラフを作るというような授業をよく見かけます。

(図参照)

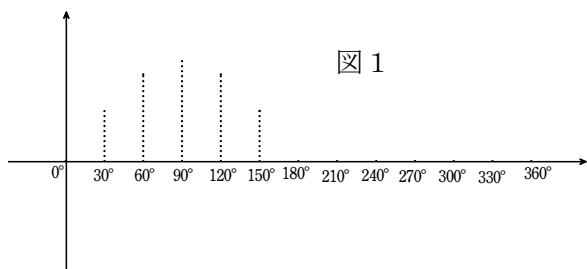


図 1

対応する点を押さえ

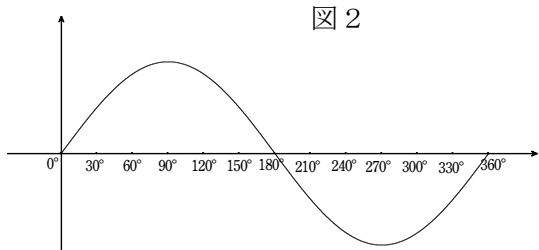
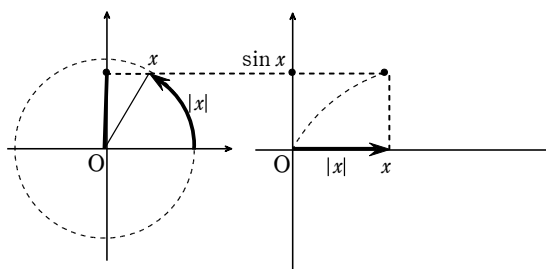
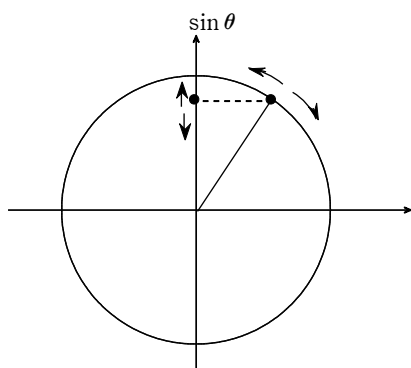


図 2

繋げてサインカーブ

確かに、これでグラフは完成するのですが、
ともなうて変化するという関係が見えてきません。
つまり、「対応」ではあっても「関数」としての意味が薄くなっています。

「ともなうて変わる2つの量」とは、 x が「にゅうっと」動くとき、それに応じて y が「にゅうっと」動いていくことです。そのようなイメージを持つためには、図のような単位円で、角（つまり弧の長さ）が「にゅうっと」変化するとき、それに対応して、高さが「にゅうっと」変化していることを動的に捉えさせたいと思います。



また、弧度法ではなく、度数法（60分法）を横軸に取ることに問題があります。例えば、図2の座標平面上に二次関数 $y = x^2$ を重ねて描きたい場合どうすればいいのでしょうか。（そういう状況は数Ⅲでしかないといわれればそれまでですが、それは問題の先送りです）

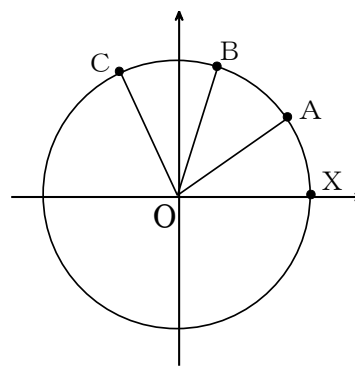
つまり、生徒たちは、三角関数といいながらも、横軸に角度（度数法）を配置した、これまで学んだ1次関数や2次関数とは別物の「関数」と感じてしまうのが現実ではないかと思います。

ですから、三角「関数」を定義するには、角度を、数直線上の実数全体と同一視するような「組み換え」という手続きを行う必要が生じます。

そのことを避けて、三角「関数」の概念を教えることは、結局どこかで「ごまかし」してしまうことになるのではないかと思います

■ 加法性を持つ量としての角

角をこれまで扱ってきた「図形の構成要素としての角度」から、数直線上の実数全体と同一視するような「加法性」を持つ量と捉えるために、弧度法を導入します。



前ページの図において、 $\angle XOA$ を、 $OX=1$ としたときの弧 XA の (符号付) 長さとして定義します。

OX を始線といい、 OA を動径といいます。

数直線では、 OX が原点にあたり、 OA が数直線上の点に対応します。また、半時計回りを正の向きと決め、これは数直線では正方向 (右向き) と対応しています。

さて、図において、仮に、 $\angle XOA$ を \widehat{XA} などとかくことにすると次のことが言えます。

- ① $\widehat{AA}=0$
- ② $\widehat{AB}=-\widehat{BA}$
- ③ $\widehat{AB}+\widehat{BC}=\widehat{AC}$
- ④ $\widehat{AB}=\widehat{XB}-\widehat{XA}$

この性質を加法性といいます。ベクトルや定積分にも言える重要な性質です。もちろん、数直線上の x 座標にも成り立つ性質です。

これで、角は数直線上を動く点と同一視して考えることができました。このことから、ともなうて変わる変化量の考え、すなわち関数を定義することができたわけです。定義域は負の数はもちろん、実数全体になります。

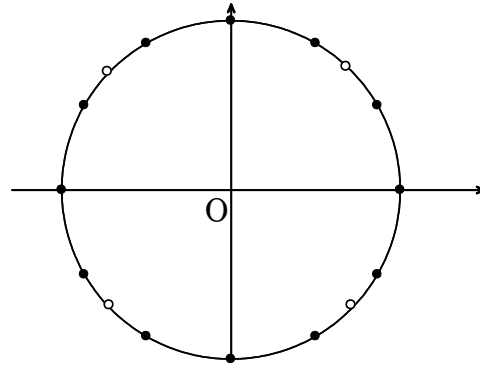
■ 具体的問題への対応

ここで「定義はその通りかもしれないが、現実的に生徒に問題を解かせるときに難しくなる」という声を本当によく耳にします。

果たしてそうでしょうか。私は、学検で0点の生徒が少なからずいた学校にも何校か勤務したことがあります。次のような工夫をしたところ、単位円と弧度法による三角関数を十分理解してくれました。

参考までに、私が授業で説明する流れを簡単に示したいと思います。

① 時計を作る



半円 (π) を 6 分割して $\frac{\pi}{6}$ (度数法では 30°)

を単位として時計をつくり、時計の針 5 分をイメージすればよいと思います。

作成した図を使って、 $\frac{5\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}$

などの場所を見つけさせます。(角は円周上に点をとる。観覧車が動くイメージ)

次に、 $\frac{\pi}{4}$ (度数法では 45°) を単位として点を

追加します。(このとき間違わないように違う印をつける)

上図のような図が完成します。これを基にして、

更に、 $\frac{3\pi}{4}, -\frac{13}{4}\pi$ などの場所を確認します。

全員が、この図を (もちろんフリーハンドで) きちんとかけるように徹底的に指導します。また、教具として観覧車 (オルゴール付) の玩具を持って行って見せたりします。

慣れてくれば、更に、 3 (ラジアン) とか、 1.5 (ラジアン) とか π の有理数倍以外の角も考えさせます。

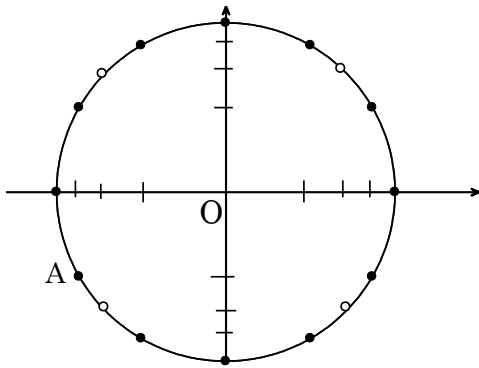
② 特殊角の三角比の値

$$\frac{1}{2} = 0.5 \text{ (半分)}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707\cdots \approx 0.75 = \frac{3}{4} \text{ (半分の半分)}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866\cdots \approx 0.875 = \frac{7}{8} \text{ (半分の半分の半分)}$$

これがポイントです。これを使って、 x 座標、 y 座標にスケールを入れます。



これで完成です。

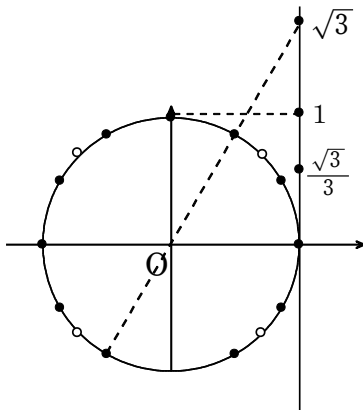
例えば、 $\sin \frac{7}{6}\pi$ とは、観覧車がA地点に来たときの y 座標なので、図からすぐに値を決定することができます。

タンジェントの場合は少し苦しいのですが、

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = 0.577\cdots \approx 0.5 = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{3} = 1.732\cdots \approx 2$$

と見て、1を基準に「半分」のところと「2倍」のところにと点をとっておけば、まず間違えません。



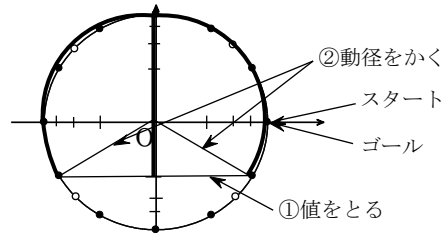
③ 不等式を解く

三角関数の方程式、不等式を解くポイントは、

- ・ 値をとる
- ・ 動径を決める
- ・ 角の値を読む

の3手詰めです。

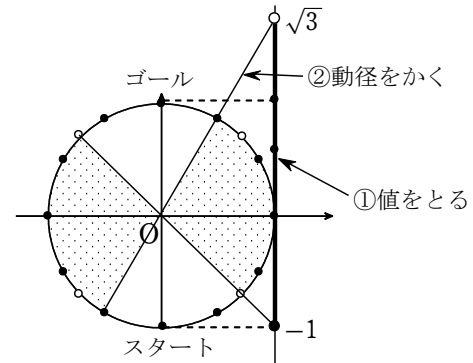
例1 $\sin x \geq -\frac{1}{2} \text{ (} 0 \leq x < 2\pi \text{)}$



スタートからゴールに向かう順で、条件を満たす角を読み取ればよい。

$$0 \leq x \leq \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi \leq x < 2\pi \quad \text{答}$$

例2 $-1 \leq \tan x < \sqrt{3} \text{ (} -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \text{)}$



スタートからゴールに向かう順で、条件を満たす角を読み取ればよい。

$$-\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{3} \quad \text{答}$$

COFFEE BREAK 13



DeSeCo の キーコンピテンシー すうがく通信 17号より

コンピテンシーについて、文部科学省の定義は次のとおりです。

【コンピテンシーの概念】

「コンピテンシー（能力）」とは、単なる知識や技能だけではなく、技能や態度を含む様々な心理的・社会的なリソースを活用して、特定の文脈の中で複雑な要求に対応することができる力。

【キー・コンピテンシーの定義】

○「キー・コンピテンシー」とは、日常生活のあらゆる場面で必要なコンピテンシーをすべて列挙するのではなく、コンピテンシーの中で、特に、人生の成功や社会の発展にとって有益、さまざまな文脈の中でも重要な要求（課題）に対応するために必要、特定の専門家ではなくすべての個人にとって重要、といった性質を持つとして選択されたもの。

○個人の能力開発に十分な投資を行うことが社会経済の持続可能な発展と世界的な生活水準の向上にとって唯一の戦略。（以上文部科学省のHPより）

難しいですね。私なりの解釈を以下に述べたいと思います。

まず、世界がグローバル化し知識基盤社会が到来する中で、個人の能力は、知識の量や技能の習熟を評価するだけでは、時代の要請に応えることができなくなったことが背景としてあります。

その中で、OECDでは、DeSeCo計画（Definition and Selection of Competencies Project）を1997年に発足させ、より大きな学力概念の国際基

準を設定するに至り、2003年にその最終報告を出しました。そこで述べられているポイントは、個人の能力は、次の2つを目指すものであるということでした。

- ① 社会に成果をもたらすこと
- ② 人生において成功する（質の高い人生を送ること）

つまり、能力とは個人と社会の両者にとって価値や効果をもたらすものという前提に立っているということです。具体的に、キー・コンピテンシーは、次の3つに集約されます。

①道具を相互作用的に用いる能力

- A) 言語・シンボル・テキストを相互作用的に用いる
- B) 知識や情報を相互作用的に用いる
- C) テクノロジーを相互作用的に用いる

②異質な人々からなる集団で互いに関わりあう能力

- A) 他人と良い関係を作る
- B) 協力する
- C) 争いを処理し解決する

③自律的に行動する

- A) 大きな展望の中で行動する
- B) 人生計画や個人的プロジェクトを設計し実行する
- C) 自分の権利、利害、限界、ニーズを守り主張する

キーワードは**道具・他者・自分**との関わりです。

更に、この三者の中核に省察性（reflectivity：社会空間を乗り切る力、矛盾や差異に二者択一を越えて対処する力、責任を持つこと）という概念を置き、3つのコンピテンシーを相互関連させながら、自らの人生をナビゲートしていくということがコンピテンスの概念です。

PISA調査は、キーコンピテンシーの①についての能力を評価するものといえるでしょう。

ちなみに、日本における「生きる力」における「確かな学力」はキーコンピテンシーの先取りであるとも言われています。