23　対称点の問題から応用力をみる

単元等　数学Ⅱ　図形と方程式（対称点の座標）

◆Contents

・応用力をつけるには

・別解を考える①　軌跡

・別解を考える②　ベクトル方程式

・別解を考える③　正射影ベクトル

1　授業の内容

直線に関して対称な点を求める.

点 $A(0,4)$ の $2x-y-1=0$ に関する対称点Bの座標 を求めよ.

2　授業を見ての所感

先日は個別訪問での授業ありがとうございました. 先生のテンポよい説明や, フラッシュカードを使いながら多くの生徒に発言の機会を与えていたことなどがとても印象に残りました.

また, 作図から問題の内容が見えてくることがあるので, きちんと作図することを強調したことは非常に良いことだと思います.

3　補足すること

私は, 個別訪問の際, 授業者の先生に, 事後に, 教材研究ネタを提供することにしています. 最終的には, それらをまとめて教材研究資料を作る予定です.

今回は, 図形と式の中での１つの重要なポイントである, 線対称の点の座標の求め方についてまとめてみたいと思います.

応用力をつけるには

例えば１＋１＝２がわかるということは,

「１＋１＝？　のとき？は２である」だけでなく,

「１＋？＝２　のとき？は１である」ということもわかって初めて「１＋１＝２がわかる」のだと私は考えています.

さて,

点 $A(0,4)$ の $2x-y-1=0$ に関する対称点Bの座標 を求めよ.

という問題に対し, 次のように説明する先生が多いのではないかと思います.

まず, 対称点をB(p,q)とおく.
① ABと直線 $2x-y-1=0$ は直交する
② ABの中点は直線 $2x-y-1=0$ を通る
上の①②の条件から p,q についての連立方程式を作り, それを解けば良い.

確かにこれは便利な解法パターンです. しかし, 問題の文脈から必然的に①や②が思い浮かぶでしょうか. 単に「対称点」という言葉を見たらこのパターン, という刷り込み型の指導は深い理解につながりません.

私は, 直線に対する対称点の座標を求める問題については, 次の①②③の流れで指導しています.

①　2点 $A(0,4)$, $B(4,2)$ に対して AB の垂直2等分線の方程式を求めよ.

ポイントは「垂直２等分線」という言葉です.「垂直」という言葉から, <u>求める直線と線分 AB が垂直であること</u>,「2 等分」から <u>AB の中点を通っていること</u>が読み取れます. もちろん, このように読みとる力は, 垂直２等分線を, コンパスを使って描く数学的体験を積んでいることが前提としてなければなりません.

この２つの自然な条件から立式して, 求める直線の方程式が得られます.

答　$2x-y-1=0$

では, もしこの問題が次のようになっていればどうでしょう.

② 2点A$(0,4)$，B($\boxed{}$,$\boxed{}$)に対してABの垂直2等分線の方程式が$2x-y-1=0$である．

これは，①と同じ問題ですが，求める場所が違います．つまり，１＋１＝？型から，１＋？＝２型に変形した問題です．この①②を同じ問題と見抜いて解けることが応用力ではないかと思います．

そして，次の問題に辿りつきます．

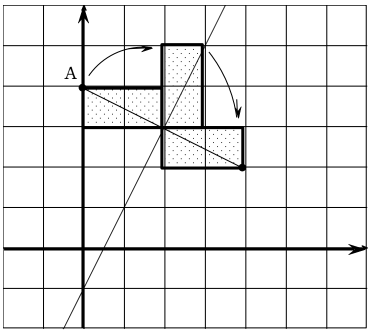
③ 点A$(0,4)$の直線$2x-y-1=0$に関する対称点の座標を求めよ．

①②③は同じ問題であることがわかるので，AB と直線$2x-y-1=0$が直交することや，AB の中点は$2x-y-1=0$上にあるという条件は，必然であることがわかります．

別解を考える

この問題を様々な角度から見ることで，教材研究を深めてみたいと思います．

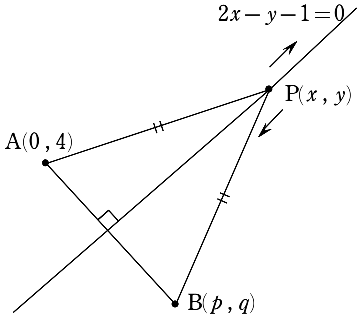
（１）図示してみる



図を描いてみると，一目瞭然です．ポイントは，直線の傾きが２なので，横１縦２の長方形と，それを 90° 回転させた横２縦１の長方形を格子の中から見つけ出すことです．

円の接線の方程式や接点の座標を求める際も，このような格子を描いてみる手法は便利で，いいことがある場合が多いと思います．

（２）軌跡の方程式



直線上の動点を P として，P の軌跡の方程式を考える方法もあります．

つまり PA＝PB からx,yの関係式を求め，それが，$2x-y-1=0$と一致していることから，B の座標を決定するわけです．

解いてみましょう．

$PA=PB$より

$$x^2+(y-4)^2=(x-p)^2+(y-q)^2$$

$$2px+(2q-8)y+16-p^2-q^2=0$$

これと$2x-y-1=0$と比較して

$$\frac{2p}{2}=\frac{2q-8}{-1}=\frac{16-p^2-q^2}{-1}$$

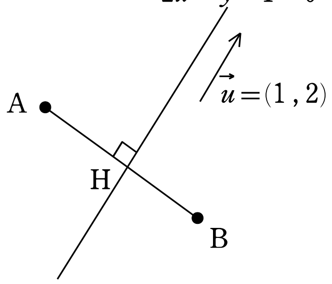
$$\begin{cases} p=-2q+8 \\ p=p^2+q^2-16 \end{cases}$$

これを解いて　$p=4,\ q=2$

よって　$B(4,2)$

少し計算が煩雑ですね．

（３）ベクトル方程式



直線$2x-y-1=0$の傾きは２なので，直線の方向ベクトルを$\vec{u}$とすると，$\vec{u}=(1,2)$おけます．

ここで，$\overrightarrow{AH}\perp\vec{u}$と$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AH}$から B の座標を決定します．

では，解いてみましょう．

Hは直線$2x-y-1=0$上の点より

$H(t\,,2t-1)$ とおける．

すなわち　$\overrightarrow{AH}=(t\,,2t-5)$

$\overrightarrow{AH}\perp\vec{u}$ より　$\overrightarrow{AH}\cdot\vec{u}=0$

よって　$t+4t-10=0$

$\therefore t=2$

$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AH}=2(2\,,-1)=(4\,,-2)$

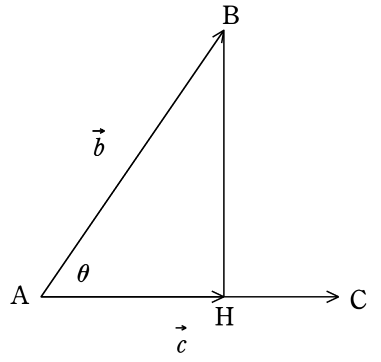
$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+(4\,,-2)=(4\,,2)$

よって　$B(4\,,2)$

これはすっきりしています.「直線上にある」「垂直である」という条件は，まさにベクトル向きといえるのではないかと思います.

（４）正射影ベクトル

まず正射影ベクトルについて準備しておきます.



図において，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$　とします.

このとき，$\overrightarrow{AH}$ を $\vec{b}$ の $\vec{c}$ への正射影ベクトル

といいます.

$\overrightarrow{AH}$ は$\vec{c}$ と同じ向きで，大きさが

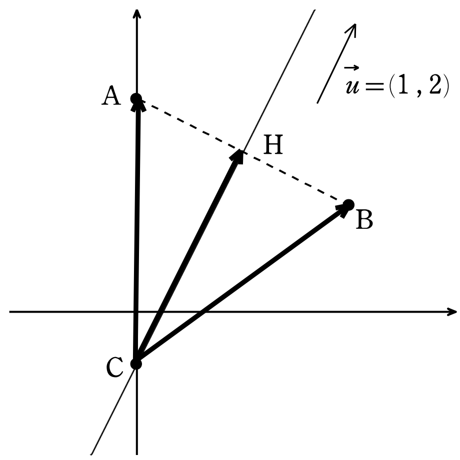
$|\overrightarrow{AH}|$ なので，$\overrightarrow{AH}=\dfrac{|\overrightarrow{AH}|}{|\vec{c}|}\vec{c}$　とかけます.

ところで，$|\overrightarrow{AH}|=|\vec{b}|\cos\theta$　なので

$\overrightarrow{AH}=\dfrac{|\vec{b}|\cos\theta}{|\vec{c}|}\vec{c}$　この分母分子に$|\vec{c}|$ をかけると

$\overrightarrow{AH}=\dfrac{|\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta}{|\vec{c}|^2}\vec{c}=\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|^2}\vec{c}$

と表すことができます.



では解いてみましょう．

$A(0\,,4)\,,C(0\,,-1)$，直線の方向ベクトルを

$\vec{u}=(1\,,2)$ とします.

すると，$\overrightarrow{CH}$ は$\overrightarrow{CA}$ の$\vec{u}$ に関する正射影ベクトル

なので，

$\overrightarrow{CH}=\dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|^2}\vec{u}$

$|\vec{u}|=\sqrt{5}$,$\overrightarrow{CA}\cdot\vec{u}=10$ なので

$\overrightarrow{CH}=\dfrac{10}{5}(1\,,2)=(2\,,4)$

ここで，

$\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CH}$　（ポイント！）　なので

$\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CH}-\overrightarrow{CA}=(4\,,8)-(0\,,5)=(4\,,3)$

$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+(4\,,3)=(0\,,-1)+(4\,,3)=(4\,,2)$

よって $B(4\,,2)$

正射影ベクトルは難しい概念ですが，これを求める過程は，センター試験に出題されてもおかしくないと私は思います.

COFFEE　BREAK 11

学力の３要素と
評価の観点
すうがく通信 12 号より

ここ十数年，特に経済先進国を中心に，学力や能力についての新しい概念が議論され，教育現場の中で取り上げられています．OECD が主体として2000年から実施されてきたPISA調査における**「リテラシー」**という概念はおなじみです．その PISA の能力概念の理論的基盤となっている**コンピテンシー**という言葉も，最近よく耳にしているのではないかと思います．

日本においても**「生きる力」「人間力」「学士力」**などの概念が文科省等の機関から出されています．

このような新しい能力概念に共通する特徴として，人間形成などの全体的な能力にまで及んでいることや「できる」「わかる」という言葉で括られるような認知的能力から，それらを社会の中でどう表現し，(社会のために）活用・応用していくかにも言及していることなどがあげられると思います．そして，それを教育の評価対象として位置付けているところがポイントです．

このような学力観が議論される背景には，**「知識基盤社会」**の到来があげられます．

知識基盤社会とは中央教育審議会の答申によると，**「新しい知識・情報・技術が政治・経済・文化をはじめ社会のあらゆる領域での活動の基盤として飛躍的に重要性を増す社会」**と規定され，その特質として以下の 4 点を示しています．

①知識には国境がなく，グローバル化が一層進む
②知識は日進月歩であり，競争と技術革新が絶え間なく生まれる
③知識の進展は旧来のパラダイムの転換を伴うことが多く，幅広い知識と柔軟な思考力に基づく判断が一層重要になる．
④性別や年齢を問わず参画することが促進される

このような情勢を踏まえ，学校教育法 30 条２で定められている**「学力の要素」**と，**評価の観点**の関係について着目してみましょう（下図左）．

新学習指導要領における評価の観点では，現行の「思考・判断」から「思考・判断・表現」と変わりました．

中教審の評価ワーキンググループの主査を務めた無藤氏は，**「表現」については，従来の技能的な表現ではなく，言語力に類した思考の言葉などによる表現**という意味であり，**思考と表現は一体的循環的に進む**ものと説明しています．尚，４つの観点に優先順位はなく，四辺形に対等に位置して，それらが合わさって四角錐の頂点に向かい評価活動を行うというモデルが提示されています．（次回は PISA 調査について）