21　分点の座標で数学を楽しもう

単元等　数学Ⅱ　図形と式（分点の座標）

◆Contents

・数学を楽しむこと（SEG の理念より）

・分点を求める意味（モノコードと音階）

・分点の位置の求め方（比例・輪ゴム）

・錘と分点（重心の位置）

1　授業の内容

(1)分点の座標の求め方の説明

(2)内分点の座標の公式を導く

(3)練習問題とまとめ

2　授業を見ての所感

授業全体を通しての印象

授業を，劇場での演劇や，音楽の演奏会などに例える人がいます．生徒が主役，先生は舞台監督であり，指揮者というわけです．

今回の授業は，演奏者である生徒達に，合奏させ，時には指名してソロパートを自在にとらせたり，先生はそんな演奏会を，生徒をぐいぐい引きこみながら楽しんで作り上げる優秀なマエストロという印象を持ちました．

先生がにこやかな表情で授業をやられていること，まずこれが一番だと思います．また，板書もよく工夫されていて，生徒が全員わかるようにとても丁寧だったと思います．

また，例題を行う時に，いきなり式を使って説明するのではなく，問題の意図の確認や，解くための法略（strategy ）をきちんと立てて進めていくことにも感心しました．

スポーツマンらしい，フレッシュで爽やかな先生のグッドパフォーマンスを楽しめた 1 時間だったと思います．

3　補足すること

私からは，授業に対しての注文ではなく，教材研究となるような話題を提供したいと思います．参考にしていただければ幸いです．

数学を楽しむ

先生の授業の良さは，先生自身が授業を楽しむ姿勢を持ち，それが生徒に伝わっているところだと思います．

SEG という塾をご存知ですか．SEG とは「大学への数学」などで有名な古川昭夫さんが主宰する学習塾で，格段の東大合格実績を誇っています．私も，一度その授業を参観させてもらったことがありますが，高校２・３年生相手に，大学初年級の高度な数学（3 次の行列式の意味と性質について）を教えていてとても驚いたことを覚えています．ハイレベル塾というと，さぞやスパルタ詰め込みの授業が行われていると思う人もいるかもしれませんが，実はそうではなく，数学の楽しさを共有しようというスタンスが感じられました．

SEG 数学科の教育理念は次のようなものでした．少し長いですが，以下に引用します．

> 私たちが目指すことは，すでに皆さんの心の中にある「数学を好きになる心」を育てることです．そして，それこそが数学を得意になる唯一の「王道」だと信じています．
>
> それでは，どうすれば「数学を好きになる心」を育てることができるでしょうか？　それには，
>
> **数学が楽しいと思っている教師に習うこと**
>
> がまず必要です．数学が楽しいと自らが信じていて，自らも楽しみ，その楽しみを他の人と分かち合いたいと思っていて，しかも，生徒がどんなところで間違えやすいかをわかっていて，注意深く教えてくれる教師に出会えば，自然に誰だって数学に興味がわいてくるものです．その上で，

数学の美しさ･考えることの楽しさを自分自身で体験すること

が欠かせません．いくら感動的な絵を見ても，自分で絵を描かない限り，絵を描く技術は上達しません．数学の技術も，自分自身で手と頭を動かさない限り伸ばすことはできません．でも，好きなことなら，そのために努力することは苦痛ではないはずです．確実なトレーニング方法は，系統的な理解に不可欠な問題を確実にやってみること．そして，いろいろなレベルの考える価値のある問題をじっくり考えることです．

そして，

数学の楽しさを他の人と共有すること

ができるようになれば完璧です．数学の楽しみを共有するためには，他人に対して自分で考えた道筋を論理的にも感情的にも伝える技術が必要となるので，楽しみを共有しようと思えば，自然に自分自身を表現する能力も身に付いてきます．（以下略）

モチベーションとインタレスト

生徒が数学を学ぼうとする動機は様々だと思います．「進学（就職）試験のため」「テストを乗り越えるため」「先生に怒られるから」などなど．

もちろんそのような動機もあるわけですが，数学そのものに対する興味（インタレスト）を持たせることも私たちは考えなければなりません．なぜこれを学ぶか，これを学ぶとどのような進展があるか，日常生活に役立つのか，などということにも触れることができれば，生徒の授業に向かうモチベーションを高めることができると思います．

では，そのようないくつかの例を紹介します．よければ授業で利用してみて下さい．

①分点を求める意味の一つとして

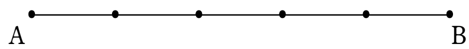
古代ギリシャ時代に，ピタゴラスがモノコード（一弦琴）を使って，調和する音階の線分比を求めた話は有名です．

彼は，弦を左から１：１の地点で押さえると，開放弦に対して１オクターブ高い音が出ること，左から１：２の内分点を押さえ，長いほうの弦を爪弾くと５度の音がでること，そして，それらはよく調和するということを調べました．（開放弦をドとすると，ドソドの和音が出てよく調和する）

そこで，逆数が等差数列になる数列を調和数列（Harmonic progression ）というのです．

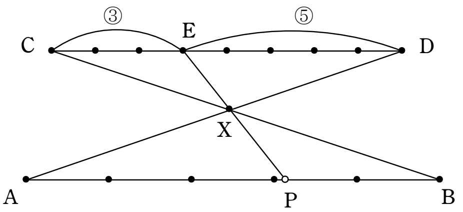
ギターのフレットの間隔は等比数列になっていたり，音楽は数学の宝庫でもあるのですが，分点を求める動機として，このような音階との話をしてみるのも動機付けになるかもしれません．

②分点の求め方（相似の考えを用いて）



例えば，上図において，AB を３ ：２に内分する点の座標は，全体が５等分されているので，すぐ求めることができます．

では，AB を５ ：３に内分する点はどこにあるでしょうか．うまく作図できますか．



例えば，上図のように求めることができます．

手順は

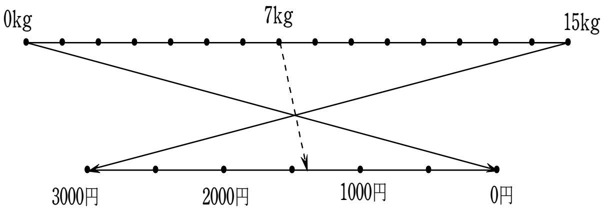
(1) ８等分してある適当な長さの線分 CD を AB に平行にとる．A と D，B と C を結ぶ．

(2) DE : EC＝５ ：３となるように E をとる

(3) 線分 AD と BC の交点 X と E を結び，その延長と AB が交わる点 P が AB を５ ：３に内分する点である

三角形の相似を用いると証明できます．この考えは，正比例関係にある２つの変量の一方から他方の値を求める速算法として使われます．

例えば，15kg で 3,000 円のみかんがあるとき，7kg 買ったらいくら払うかというときに，下図のような図を用意して作図します．

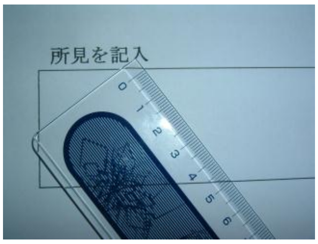


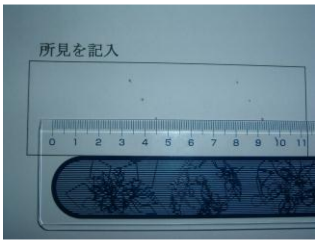
0 kg は 0 円，15kg は 3000 円なので対応するところを結ぶ．目盛りを細かくしておけば，何 kg で何円か，何円分は何 kg などが直ちにわかる．

つまり，線分比は射影によって変わらない一つの不変量であるということを昔の人はよく知っていたのでしょうね．

次に線分比は射影によって変わらないことを，実生活と関連させた話題で考えてみます．

履歴書または志望理由書に文章を書かなければなりません．A さんは，5 行分の罫線を引いておこうと思いました．しかし，縦の長さを測ると，4cm しかありません．どうすればよいでしょう．





射影によって線分比は変わらないということを知っていた A さんは図のように定規を斜めにして 5cm のところにあわせました．

それを，適当な 2 箇所で行って，点を結んでいけば見事！5 等分されました．生活の知恵です．

数学の有用性一つの例証です．

③ザビエルのゴム

これはザビエルというあだ名の先生（現在白百合学園に勤務している伊藤潤一先生）が考案したのでこの名がついています．

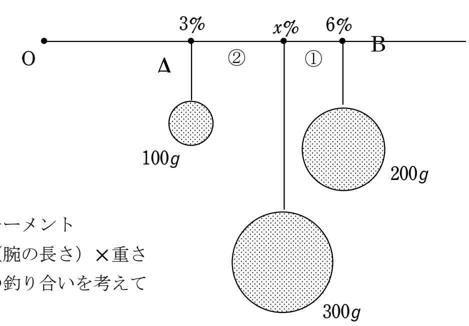
輪ゴムを何本か繋げただけのものですが，授業での効果は抜群です．写真では 5 本の輪ゴムを繋ぎ，3 本目と 4 本目の繋ぎ目にクリップを付けています．ゴムは一様に伸びることからつねにクリップの位置は 3 ： 2 をキープします．重心の位置の確認や，軌跡の方程式など，いろいろ使えます．

④モーメントの釣り合い

現在平舘高校に勤務している藤澤先生から，食塩水の濃度を求める式はちょうど分点の座標を求める式と同じであるということを聞いたことがあります．

> a%の食塩水 n g と，b %の食塩水 m g を混ぜたとき x %の食塩水ができたとすると
>
> $$x=\frac{na+mb}{m+n} \quad (\%)$$

これはモーメントの和の問題と捉えてもよいと思います．



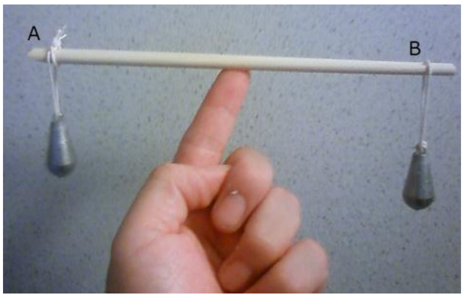
モーメント
（腕の長さ）×重さ
の釣り合いを考えて

$(100+200)x=100\times 3+200\times 6$

$x=\dfrac{1\times 3+2\times 6}{1+2}=5$ %

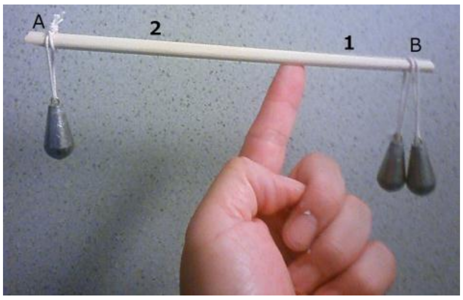
このとき，x はABを 2 ： 1 に内分する位置にある

次の写真のように割り箸と釣りの錘を使った実験も面白いと思います．



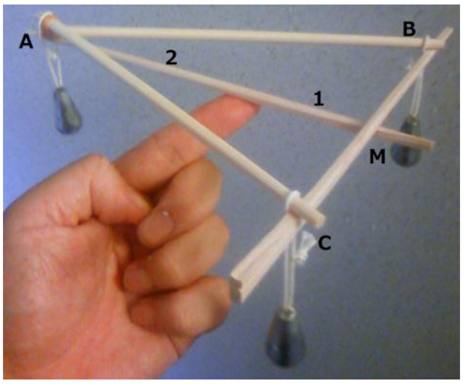
ABの両端に10gの錘をぶら下げる．

釣り合いの点は当然中点である．



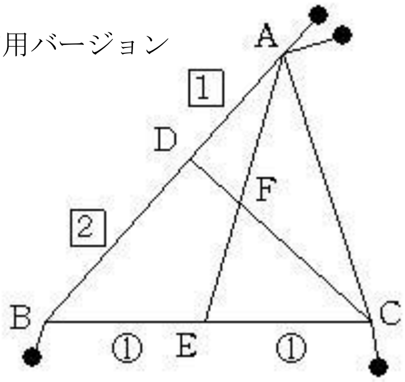
では，A地点に10g，B地点に20gぶら下げた場合はどうか．だいたいの生徒は２：１の地点と答える（班を作って実験させてもよい）．その後，両端の錘の分布をいろいろ変化させて釣り合いの点を調べる．

この考え方の良さは，錘の分布によって分点の位置を決定づけることができるということである．



三角形を作って各頂点に１個づつ錘を分布させる．BCの中点のM地点には２個分の錘が，A地点には１個分の錘がかかっているので，釣り合いの点はAMを２：１に内分する点であることがすぐ納得できる．

応用バージョン

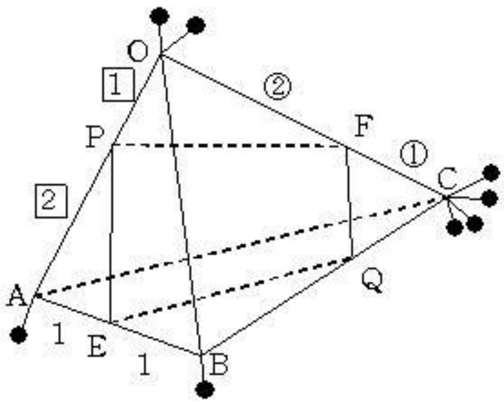


図において，AD : DB＝１：２　BE : EC＝１：１であれば，A地点に２個，B，C地点にそれぞれ１個の錘を分布させたときの釣り合いの点を決定する図なので，ベクトルやメネラウスの定理を使わずとも

CF : FC=３：１　　AF : FE＝１：１

などたちどころにわかる．

（ただし，これを受験用の裏技にに使うのは注意が必要）



紙面が余ったので，余計なお世話でもう一問．

四面体OABCでOAを１：２に分ける点をP，ABを１：１に分ける点をE，BC上の点をQ，COを１：２に分ける点をFとし，いま，PEQFが同一平面上にある（つまりPQとEFが交わる）とき，図のように錘を各頂点に分布させれば，PQとEFの交点Xは釣り合いの点である．このことから，BQ : QC=4：1や，PX : XQ=５：３，EX : XF＝３：１などたちどころにわかってしまう．