18　整式はユークリッド整域をなす

単元等　数学Ⅱ　式と計算（分数式の四則計算）

◆Contents

・数の構造／整式の構造
・ユークリッド整域
・同値律
・分数の割り算はなぜひっくり返してかけるのか

1　授業の内容

分数式の約分，乗法・除法の問題演習

約分　$\dfrac{A}{B}=\dfrac{AC}{BC}$　乗法　$\dfrac{A}{B}\times\dfrac{C}{D}=\dfrac{AC}{BD}$

除法　$\dfrac{A}{B}\div\dfrac{C}{D}=\dfrac{A}{B}\times\dfrac{D}{C}=\dfrac{AD}{BC}$

2　授業を見ての所感

授業全体を通しての印象

本時は分数式の計算ということで，「研究授業」を行うにはとてもやりにくい単元だったと思いますが，先生は生徒の誤りにもきちんと向き合いながらつねに笑顔を絶やさず，丁寧に授業を行ったことはとてもよかったと思います

生徒達にも先生の発問にきちんと受け答えしようというポジティブな姿勢を感じました．日頃から，先生と生徒がよい関係を築いているのだろうと推察致しました．

また，前日に予習のチェックを行っていたことはとてもよいことだと思います．昨年，山田先生からの指摘を受け，そこをきちんと受け止めているところに先生の向上心を感じます．

このように一人一人に目をかけることができるのも少人数クラス編成の良さであると思います．今後とも，継続して生徒のノート点検を行って，できれば，予習ノートの内容を踏まえて授業の展開の仕方を工夫していくことを考えてみれば良いのではないかと思います．

3　補足したいこと

私からは，授業技術や授業に対しての注文ということではなく，純粋に教材研究としていくつかの話題を以下に提供したいと思います．参考にしていただければ幸いです．

構造を考える

多くの先生は，分数式の導入のところで，「整数」と「整式」は同じ構造を持つので，整数の世界で行ったことが整式でも同様に行うことができると説明すると思います．

では「同じ構造」とは具体的にどのようなことなのか，まずそのことを述べておきます．

簡単に言うと整数も整式も「**可換環**」をなしている，もっというと，どちらも「**ユークリッド整域**」をなしているとまとめることができます．

環(Ring)とは次の①～③のような性質を持つ集合のことです．

① 加法に関して群である（閉じていて，結合，交換法則が成り立つ．０があり，加法に関する逆元がある（つまり減法ができる））

② 乗法に関して閉じていて結合法則が成り立つ

③ 分配法則が成り立つ

環とは，**加法の他にもう一つの演算（乗法）が定義されていて，その２つの演算をとり結ぶ分配法則が定義されている世界**というイメージです．

更に

④ 乗法に関する交換法則が成り立つ

とき，**可換環**といい，また更に，

⑤ 乗法に関する単位元がある

⑥ ０以外の零因子がない

という条件を満たすとき，その環は「**整域**」(Integral Domain)であるといいます．

例えば，2次の正方行列の世界は環をなすのですが，$AB=BA$　が成り立たない，つまり可換環ではないわけですね．また，行列では $AB=O$ の

とき必ずしも $A=O$ または $B=O$ とならないこと（零因子の存在）もご存じのことと思います．

ここで，更に乗法に関する逆元が存在するとき，体（Field）となります．つまり**体とは四則演算について閉じた世界**のことです．ですから整数の他に $ax=b\ (a,b\in \mathbb{Z})$ となる x を $\dfrac{b}{a}$ と定義して，数の世界を拡張しておけば，四則が自由に行える体を作ることができます（有理数体 Q）．

さて，整数は除法については閉じていませんが整除が可能です．すなわち，$a,b\in Z, b\neq 0$ のとき，$a=bq+r$ （ $0\le r<|b|$ ）

を満たす整数 q,r をただひと組決定できるということです．ここで $r=0$ のとき，a は素因数分解できたことになります．

整式の世界でも同様に，例えば，実数係数を持つ x の多項式全体の集合を $R(x)$ とすると，

$A,B\in R(x), B\neq 0$ のとき，$A=BQ+R$

（$\deg R<\deg B$）を満たす整式 Q,R をただひと組決定できるということが言えます．

このような関係を満たす整域をユークリッド整域といいます．

この性質から，因数分解の一意性や，最大公約数や最小公倍数の性質（例えば 2 数の積は，その 2 数の最大公約数と最小公倍数の積に等しいなど）を導くことができます．

同値関係と分数の約分

ある集合の任意の２つの要素（同一のものも可）を取り出したとき，その２つの間に「その関係が有るか無いかを判定できる」ような「関係」をその集合の「2 項関係（$a\sim b$）」といいます．

例えば，$a\sim b \Leftrightarrow a>b$ は「a は b より大きい」なども一つの関係です．

ここで，この関係が次の３つの規則を満たすとき，その 2 項関係を同値関係と呼びます．

反射律	$a\sim a$
対称律	$a\sim b \quad \Rightarrow \quad b\sim a$
推移律	$a\sim b\,,\ b\sim c \quad \Rightarrow \quad a\sim c$

「等しい」という概念はこの３つの法則をすべて満たすものです．

では，この概念を使いながら，分数式の約分，つまり「分数式は分母と分子に同じ式をかけても等しい」ということを考えてみたいと思います．

２つの分数式 $\dfrac{A}{B}$, $\dfrac{C}{D}$ が「等しい」ということを，

$AD=BC$ （$B\neq 0, D\neq 0$）と定義しておきます．これは $\dfrac{A}{B}=\dfrac{C}{D}$ として「分母を払う」（実際はこのような操作はまだ約束されていない）ことから得られる自然な定義です．これが先ほどの同値律を満たすか調べてみましょう．

反射律　$AB=AB$ なので $\dfrac{A}{B}=\dfrac{A}{B}$ は明らか．

対称律　$\dfrac{A}{B}=\dfrac{C}{D}$ のとき $AD=BC$ より $CB=DA$

（整式は可換環だから！）　よって $\dfrac{C}{D}=\dfrac{A}{B}$

推移律　$\dfrac{A}{B}=\dfrac{C}{D}$，$\dfrac{C}{D}=\dfrac{E}{F}$ のとき $\dfrac{A}{B}=\dfrac{E}{F}$

これは，$AD=BC$ (①)，$CF=DE$ (②) のとき $AF=BE$ (③) を示せばいいわけです．

①の両辺に E を，②の両辺に A をかけると

$$ADE=BCE,\ ACF=ADE$$

よって $BCE=ACF$　，$\therefore BCE-ACF=0$

$C(BE-AF)=0$ （整式は環だからできる！）

ここで $C\neq 0$ のとき（$C=0$ のときはトリビアル）$AF=BE$ （整域だから零因子の存在がない！）

よって $\dfrac{A}{B}=\dfrac{E}{F}$．　以上で同値律が成り立つことが示されました．

では，$\dfrac{A}{B}=\dfrac{AC}{BC}$ を示しましょう．

自明な式 $ABC=ABC$ から

$A(BC)=B(AC)$　よって，$\dfrac{A}{B}=\dfrac{AC}{BC}$

ここでも整式が可換環であることが効いています．

分数式とは何か

先生が授業で用いた教科書では分数式は次のように定義されていました．

２つの多項式 A,B によって，$\dfrac{A}{B}$ の形で表され，B に文字を含む式を分数式という．

ここで，分母が数である場合（文字を含まない）は分数式なのかとか，単項式と多項式を区別すべきか，という細かい議論もありました，そこにあまり拘泥する必要はないというのが私の見解です．

普通は分母が数の場合，例えば $\dfrac{x+1}{2}$ などは，分数式というより，有理式としてまとめておくべきかと思いますが，広く分数式と考えても問題はないかと思います．

代数構造的に考えた場合，いちいち分母が数だの単項式だので区別することは，除法について閉じた世界を論じられず見通しが悪くなります．

つまり，整式から分数式をつくることで，環（和と積の世界）から体（四則ＯＫの世界）に世界を広げていくわけなので，分数式（実際は有理式）は整式を包含していると考えるのが自然です．

また，式には代数としての式と関数としての式という２つの側面があります. この単元で考える分数式は代数としての構造を考えているので混乱しないよう注意が必要です．

例えば，分数式，$\dfrac{A}{B}$ において，B は０であってはいけませんが，$\dfrac{x+1}{x-2}$ という式はどうでしょう．

関数として考えた場合は $x\neq 2$ であることを考慮する必要があるけれど，代数式として考えれば分母は０ではありませんね．

$x=1+\sqrt{2}$ のとき x^3-2x+1 の値を求めよ，

といった問題がよくあります．通常次のように解きます．

$x-1=\sqrt{2}$ として両辺２乗して $x^2-2x-1=0$　という式を作る x^3-2x+1 を x^2-2x-1 で割って $x^3-2x+1=(x^2-2x-1)(x+2)+3x+3$ ここで $x=1+\sqrt{2}$ を代入すれば $x^2-2x-1=0$ なので，$x^3-2x+1=3+3\sqrt{2}+3=6+3\sqrt{2}$

このとき，x^2-2x-1 は０なのに割っていいのかという質問がよく出ます．しかし，ここで行った除算は整式がユークリッド整域であることに基づいた代数的演算なので，全く問題はないのです．

分数式の乗法と除法

さて，分数式を次のように定義してみましょう．

分数式 $\dfrac{A}{B}$ とは，$BX=A$（$B\neq 0$）を満たすような式 X のことである． X は $A\div B$ でありこれを $\dfrac{A}{B}$ とおく

この定義を使うと，分数式の乗法 $\dfrac{A}{B}\times\dfrac{C}{D}$ を次のように考えることができます．

$BX=A, DY=C$ ※　となる X,Y がそれぞれ

$\dfrac{A}{B},\dfrac{C}{D}$ である．※の２式の両辺かけあわせて

$(BD)XY=AC$　よって $XY=\dfrac{AC}{BD}$

$\dfrac{A}{B}\times\dfrac{C}{D}=\dfrac{AC}{BD}$　が導かれました．

同様に除法も考えてみましょう．

$BX = A, DY = C$ より

$BDX = AD$ （D を両辺に掛けた）

$BDY = BC$ （B を両辺に掛けた）

この式から　$\dfrac{X}{Y} = \dfrac{AD}{BC}$

すなわち，$X \div Y = \dfrac{A}{B} \div \dfrac{C}{D} = \dfrac{AD}{BC}$

除算の「ひっくり返して掛ける」が導かれました．

4　おわりに

私が八戸にいたとき，東北大学出身の若い優秀な英語の講師の先生がこんなことを言ったのを覚えています．

「本校の生徒だったら私でも数学を教えられる」

確かに問題解法の技術を教え，教科書の字面を追いかけてその内容を生徒に伝えることはできるかもしれません．更に発問や生徒を動かす「術」に長けていれば生徒の得点も伸ばすかもしれません．

しかし，そこで私が思うのは，私たちは数学「教師」である他に，「数学」教師でもあるということです．ですから，教科書に書いてあることの背景について深く研究することや，時には教科書を離れた数学的話題にも関心を持つことが特に若い先生には必要ではないかと思います．そしてそのことが，将来数学者を目指す生徒を産み出すことにもなるのではないでしょうか．

研究会で副校長先生が「自分は数学が苦手だったけれど，今日の授業なら自分にもわかる」とおっしゃいました．それは，先生の授業がわかりやすかったということと同時に「このような授業なら私にもできる」と思われる授業だったと辛口の評価と受け止めることもできるのではないかと私は思いました（穿った見方ですが）．

放送大学教授の長岡亮介先生はブルガリアの数学教育について高い評価をしています．彼によると「小学校 1 年生の授業を参観したが，整数の性質の講義をするのに先生がその脳裏に『ペアノの公理』をおいていたり・・・」ということが述べられています．

今回私は研究会の中で，構造とか同値などについての話をしました．それは，もちろん私たちは学者を標榜するわけではありませんが，プロの「数学」教師として，様々な場面を捉えて学識を身につけ，専門性を高めることが必要だと思うからです．そして，今そのことが忘れられているのではないかと私は強く感じています．

ある進学校に勤務していたとき，数学が大の苦手である生徒から「マイナス掛けるマイナスはなぜプラスになるのか」という質問を受けたことがありました．その生徒は，いろいろな先生に質問しても答えてくれなかった，中には「そんなのは出ない！」と怒る先生もいたとのことでした．私は，うまく答えらなかったけれど，生徒と一緒にずいぶん考え，他の生徒や親まで巻き込んで大きな議論になりました．あまり満足のいく解答を示すことはできなかったけれど，その生徒は，自分のために一生懸命考えてくれたととても感謝され，数学を一生懸命勉強するようになりました．

例えば，今回の授業の中で，生徒が「分数の掛け算はなぜ分母は分母どうし，分子は分子どうしかけるのか」とか「分数の割り算はなぜひっくり返して掛けるのか」といった素朴な疑問が出てきたら生徒にとっても教師にも数学を深く研究するチャンスなのかなと思います．