

12 トレミーは $\sin 1^\circ$ をどうやって求めたか

単元等 数学 I 図形の計量/数学史

◆Contents

- ・タレスについて
- ・アルマゲストと三角比の表

1 授業の内容

- (1) タンジェントの定義とその利用
- (2) サインコサインの定義とその利用

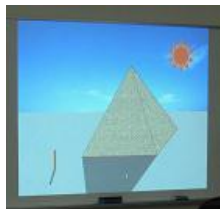
2 授業を見ての所感

先日は個別訪問で授業を見せていただきありがとうございました。数学科全員が互いの授業を見せ合い、2度にわたり授業研究会を行うという充実したOJTの持ち方をされているのに驚きました。

また、研究会の雰囲気も互いに高めあおうという良い雰囲気で行われていて、S先生を中心に、数学科のメンバーがとてもよくまとまっていると感心いたしました。

P先生は初任2年目とは思えぬ素晴らしい授業で、こちらから多くのことを学ばせていただきました。良かった部分をまとめると

- ① 冒頭に数学史の話題を取り入れ生徒のモチベーションを喚起していたこと。
- ② PCによるプレゼンテーションを効果的に用いていたこと。



- ③ 中学校との接続部分や、技能を鍛える部分を補うプリントを作成し実施していたこと。
- ④ 「比」と「比の値」、頂点の「A」と角度の「A」の違いなど、用語や記号をきちんと定義し説

明していたこと。
などです。

タンジェントの導入を、タレスのピラミッドの高さを測定する話題から入り、またマリオスの高さの話など身近な場面と関連させながら、更に自作のPCのセッションを用いて生徒に興味を抱かせるなど、深い教材研究なしには行えない授業だったと思います。一方、教科書の定義と、小中での既習事項(比・相似)に忠実に、概念の説明を心がけていることや、生徒の技能を磨くための演習問題も豊富に準備されていることなど、メリハリのあるバランスの良い授業構成でした。

S先生の授業は半分しか観られませんでした。その中で私が感心したことは、

- ① 開始時での5分間小テストを継続して実施していること。また、相互評価させることで、学びあいの活動を行っていたこと。
プリントも採点しやすい工夫がされていた。
- ② 学習課題(三角比の定義(またはその変形式)を用いて直角三角形の辺の長さを求める)を明確にして授業を展開していたこと。
- ③ 教科書の音読や、考えさせてから発問するなど、生徒の言語活動を評価する場面を取り入れていたこと。

などです。

先生は、常に生徒の定着を確認しながら丁寧に授業を進めておられました。学習課題の提示、吟味した発問、構造的な板書、教科書の音読など、私たちが様々な場で提示している具体的な取り組みを意識された授業展開をしていることが強く感じられました。多くの先生方に見て欲しい模範的な授業だったと思います。

研究会では、一番年長である先生自らの、授業力を向上させようという虚心坦懐な姿勢が、他の先生に良い影響を与え、その結果数学科のまとまりに繋がっていると感じました。

3 補足すること

私は、個別訪問を行った先生方に対し、その授業に関連する内容についての教材研究ネタなどの話題を提供させてもらっています。

今回は、三角比にまつわる数学史の話を若干述べたいと思います。

■ タレス (Thales)

今回、P先生の授業で、ピラミッドの測量に関するタレス(ターレス、タレースともいう)の有名な話を紹介してくれましたが、私は、中学や高校の授業の中で、ギリシャ7賢人の一人で、人類史上最初の数学者ともいわれるタレスのことをもって積極的に取り上げて欲しいと常々思っていましたのでとても嬉しかったです。

では、タレスの業績や、エピソードをいくつか紹介したいと思います。

タレス(B.C. 624~546)はギリシャの植民地イオニアのミレトスという町に生まれ、商人として、地中海を渡りエジプトや西アジアを往来する中で、いろいろな知識を持ちかえりました。

特に、エジプトで発達した数学と天文学に関心を示し、ギリシャに帰ってからもその研究を行いました。

◆タレスが証明したこと

エジプトでは測量術が発達していましたが、なぜ、そのような作図法で結果が得られるかを、初めて論理的に「証明」したといわれています。つまり、測量の「技術」から、図形の「学問」へと発展させた人物だったわけです。

タレスは次のことを示しました。

- 1 二等辺三角形の両底角は等しい
- 2 対頂角は等しい
- 3 2つの三角形において1組の辺の長さが等しくその両端の2組の内角が等しいとき合同となる(三角形の合同条件)
- 4 2つの三角形において1組の内角が等しく、

それをはさむ2組の辺の長さが等しいとき合同である。(三角形の合同条件)

5 相似の三角形の対応する辺の比は等しい

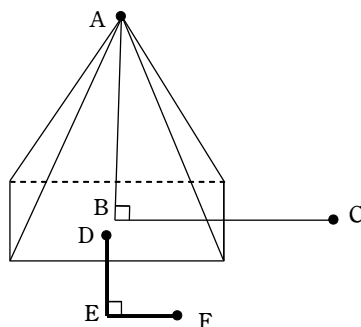
6 直径に対する円周角は 90° である

これは、まさに中学校で習っている幾何の基本的なことがらですね。

タレスは3, 4の三角形の合同条件から、山の両側の2地点の距離や、岸から沖に浮かぶ船までの距離などを算出しました。

◆ピラミッドの高さを測る

タレスは、ピラミッドの脇に棒を1本立てて、その影の長さからピラミッドの高さABを求めたと言われていますが、求め方は次の3つの考え方があります。



- ① $DE=EF$ になったとき、BCの長さが高さである
- ② 相似の三角形の対応する辺の比は等しいので、 $AB:DE=BC:EF$ という比例計算でABを求める
- ③ 相似な三角形は等しい角を挟む辺の長さは比例するので、 $AB:BC=DE:EF$ からABを求める

タレスの求めた手法は①か②と言われていますが、彼の考えを受け継いだギリシャの数学者ユークリッド(B.C. 300?)は原論の中で、相似を③の立場で考えています。③がまさに三角比(タンジェント)にあたるわけですね。

ちなみに、②のタイプを「相似比型比例式」③のタイプを「形状比型比例式」と呼んでいる人もいます(上垣渉(三重大学))。

◆タレスのエピソード

①万物は水である

タレスは哲学者であり、「万物は水である」として、世界は生きたもので、すべての無生物なものもダイモン（神々）に満ちていると唱えました。

②タレス四季を見出す

タレスは四季を見出し、1年を365日に分けた人物といわれています。

③タレス日食を予言する

タレスは数学だけでなく、天文学も深く研究していました。ヘロドトスの書「歴史」によると、彼はB.C. 585年5月28日の日食を予言したとされています。しかし、当時の人々は誰も信じず、気でも狂ったのかとの噂が流れました。ところが、予言通り日食が訪れて、真昼に星がまたたきました。人々はタレスの偉大さに驚嘆しました。

④タレスどぶに落ちる

そんな偉大な天文学者であったタレスですが、ある夜、老婆をともなって星空を眺めて、思いを巡らせていたとき、うっかり道端のどぶに落ちてしまいました。その時、老婆に、「タレス先生はどうしてあんな遠くの星のことがわかるのに、自分の足元もことはお判りにならないのでしょうか」と冷やかされたというエピソードもあります。

⑤タレスロバに教える

タレスが商人時代、ロバの背に塩を載せて、注文先に移動していたとき、ロバが浅い川で躓いて転び、背中の塩を全部流してしまいました。その後ロバは「転ぶと荷物が軽くなる」と学習し、移動で川を渡る際にわざと転ぶようになりました。そこで、タレスは、ロバの背に塩ではなく綿を積んでおきました。川で転んだロバは、水を吸って重くなった綿を背負うことになりました。その後、わざと転ぶ癖が直ったということです。

(註 最近の数学史研究では、タレスが先駆的幾何学者であるのは疑わしいという説もあるようです)

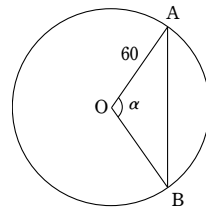
■ アルマゲストと三角比の表

三角比の表の原点は、紀元2世紀頃の数学者であるプトレマイオス (Claudius Ptolemaios トレミーともいう) に見ることができます。

彼の著書「アルマゲスト」は、コペルニクスの「天球回転論」とニュートンの「プリンキピア」と並んで、天文学の三大古典といわれています。

このアルマゲストの中に、現在で言われる三角比の値が登場します。

図のように半径60の円に対し角 α に対する弦ABの長さを、何と 0.5° 刻みで計算しているのです。



ABの半分(半弦)の長さがちょうど $60 \sin \frac{\alpha}{2}$ の値を表しているのです、まさに元祖三角比の表といえると思います。

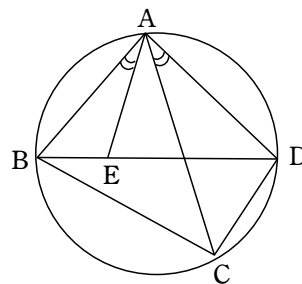
この三角比の値を求めるのに活躍するのは、次のプトレマイオスの定理(トレミーの定理)です。

<トレミーの定理>

四角形ABCDが円に内接するとき、相対する辺の積の和は、対角線の積に等しい。

$$(AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD)$$

<略証>



$\angle BAE = \angle CAD$ となるようにEをとる
このとき $\triangle BAE \sim \triangle CAD$ なので

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BE} \quad \therefore AC \cdot BE = AB \cdot CD \dots ①$$

$\triangle AED \sim \triangle ABC$ なので

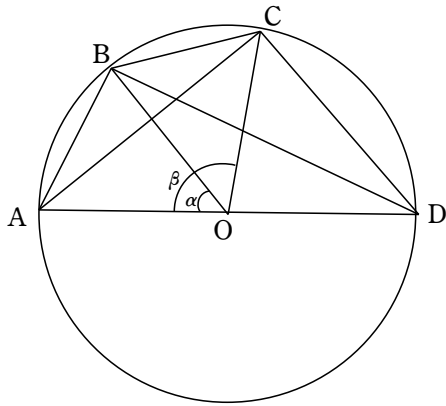
$$\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{ED} \quad \therefore AC \cdot ED = BC \cdot AD \dots ②$$

①+②より

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$$

この定理を使えば、円に内接する四角形の4辺と2対角線のうち、5つがわかれば残り一つを決定することができるので、センター試験に出かける受験生などには非常に重宝されています。

ところで、この定理を三角関数で考えてみるとどうなるでしょうか。



トレミーの定理から

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$$

円の半径を1, $\angle AOB = \alpha$, $\angle AOC = \beta$ とすると

$$AB = 2\sin \frac{\alpha}{2} \quad BC = 2\sin \frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$CD = 2\sin \frac{180^\circ - \beta}{2} = 2\cos \frac{\beta}{2}$$

$$AC = 2\sin \frac{\beta}{2} \quad BD = 2\cos \frac{\alpha}{2}$$

$AD = 2$ なので

$$4\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + 4\sin \frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$= 4\sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

よって

$$\sin \left(\frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) = \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2}$$

何と、トレミーの定理は三角関数の加法定理であることがわかりました。

つまり、2つの角の三角比の値がわかれば、その和・差で表される角の三角比の値を求めることができるというのがトレミーのアイデアだったわけですね。

30° , 45° , 60° の三角比は簡単に求められるので、トレミーの定理(加法定理)によって、 15° の三角比も求めることができます。

また、加法定理から、三角関数の半角の公式

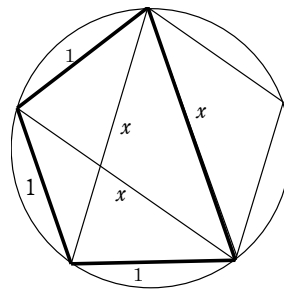
$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{2} \quad \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

も得られるので、 $30^\circ \rightarrow 15^\circ \rightarrow 7.5^\circ \rightarrow \dots$ と

どんどん半角の三角比を求めることもできます。

ところが、この方法では 1° 刻みの三角比の値を計算していくことはできません。一体トレミーはどのようにして細かい三角比の表を作成したのでしょうか。

一つ目のポイントは、 18° の三角比です。

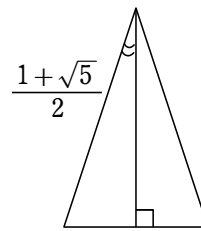


1辺の長さが1の正五角形でトレミーの定理をあてはめてみましょう。

$$1 \cdot 1 + 1 \cdot x = x \cdot x$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$



よって、

$$\sin 18^\circ = \frac{1}{\sqrt{5} + 1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

コサインはピタゴラスの定理から求めればいいですね。

さて、ここで、 18° の三角比がわかったので、 15° との差を考えることで、 3° の三角比がわかります。つまり、 3° 刻みの三角比を作ることがまずわかりました。

1度刻みの三角比を求めるためのもう一つのポイントは次の定理です。

$$\alpha < \beta \text{ のとき } \frac{\beta}{\alpha} > \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \text{ である}$$

アルマゲストでは、角の二等分線の性質などを使って証明しているのですが、非常に煩雑なので、ここでは、高校生風に数学Ⅲを用いて証明してみましょう。

証明

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ($0 < x < \pi$) のグラフを考える。

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

$f'(x)$ の分子の符号が不明なので、

これを $g(x)$ とおくと

$$g(x) = x \cos x - \sin x$$

$$g'(x) = \cos x - x \sin x - \cos x \\ = -x \sin x < 0$$

$g(0) = 0$ なので $g(x) < 0$ ($0 < x < \pi$)

よって y は $0 < x < \pi$ で単調減少

すなわち $\alpha < \beta$ のとき

$$\frac{\sin \alpha}{\alpha} > \frac{\sin \beta}{\beta}$$

$$\therefore \frac{\beta}{\alpha} > \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \quad (\text{示した})$$

では、この定理を使って 1° の三角比を求めてみましょう。

まず、三角比の値を準備しておきましょう。8桁電卓で計算して、最終的には小数点以下第4位までの値を求めることにします。

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = 0.258819$$

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = 0.965926$$

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = 0.309017$$

$$\cos 18^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 18^\circ} = 0.951057$$

$$\sin 3^\circ = \sin 18^\circ \cos 15^\circ - \cos 18^\circ \sin 15^\circ \\ = 0.052336$$

$$\cos 3^\circ = \cos 18^\circ \cos 15^\circ + \sin 18^\circ \sin 15^\circ \\ = 0.99863$$

$$\sin \frac{3}{2}^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 3^\circ}{2}} = 0.026177 \quad \blacktriangle$$

$$\cos \frac{3}{2}^\circ = \sqrt{\frac{1 + \cos 3^\circ}{2}} = 0.999657$$

$$\sin \frac{3}{4}^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{3}{2}^\circ}{2}} = 0.01309 \quad \star$$

これでひとまず完了。▲と★を使います。

$$\frac{3}{4} < 1 \quad \text{なので、定理より}$$

$$\frac{1}{3} > \frac{\sin 1^\circ}{\sin \frac{3}{4}^\circ}$$

$$\therefore \sin 1^\circ < \frac{4}{3} \sin \frac{3}{4}^\circ = 0.017453$$

$$1 < \frac{3}{2} \quad \text{なので、定理より}$$

$$\frac{3}{2} > \frac{\sin \frac{3}{2}^\circ}{\sin 1^\circ}$$

$$\therefore \sin 1^\circ > \frac{2}{3} \sin \frac{3}{2}^\circ = 0.017451$$

よって

$$0.017451 < \sin 1^\circ < 0.017453$$

このことから $\sin 1^\circ$ を小数点以下第4位

までもとめる $\sin 1^\circ = 0.0175$

($\sin 1^\circ = 0.01754$ まで正しい)

何と、プトレマイオスは不等式で評価して値を求めたのです。古代ギリシャの数学者の知恵は我々の及ぶところではありませんね。

COFFEE BREAK 6



なぜ数学を学ぶのか すうがく通信5号より

なぜ数学を学ぶのか。

今回は、自然現象に潜む数学の世界について取り上げたいと思います。



左写真を見て下さい。寒い冬、猫がまるで球体のように丸くなっています。なぜでしょう。猫は気温が下がると、体温をできるだけ放出したくないため

に、体の表面積をできるだけ小さくしようとします。球とは、決まった体積を覆う、最小の表面積を持つ物体だからです。

次の写真は、針金で作った輪に石鹸幕を張ったものです。輪が中にできるように糸をわたしています。今、その石鹸幕の内部にある糸の輪で囲まれた部分を針でつついて、石鹸幕に穴をあけます。



すると、きれいな円形の穴があきます。石鹸幕は、どの部分も、同等な張力で張られています。だから

輪の中に穴があくと、外側の膜が引っ張る力によって、内部の輪は、面積を最大にしようという現象がおきます。

糸の長さが一定なので、その中で最大の面積を持つ図形が円というわけです。言い換えると、同

一面積の図形の中で、周の長さが最も短い図形が円なので、円に落ち着くといってもいいかもしれません。

まるで、猫も石鹸幕も数学を知っているかのようです。

以前、「やまとなでしこ」というテレビドラマの中で、

「数学や物理というのは神様のチェスを横から眺めてそこにどんなルールがあるのか、どんな美しい法則があるのか探していくことだ」という物理学者のリチャードファインマンの言葉が紹介されていました。

自然現象とは、でたらめに起こっているものではなく、「エネルギーが最小の状態、安定する方向に推移していく」という原理が働いていると推察できます。いわばそれが「神様が行っているチェスのルール」でしょうか。

この原理は「変分原理」と呼ばれています。18世紀中頃、スイスの数学者オイラーは、極大・極小の性質を用いて曲線を見出す方法を研究し、「変分法」と呼ばれる数学の一分野を築くきっかけを作りました。

なぜ数学を学ぶのか。それは、私たちの周りにある自然現象の秘密を解く—神様が行っているチェスのルールを覗く—ため、ともいえるかもしれませんね。

(変分原理については「どこにでも居る幾何・アサガオから宇宙まで」(井ノ口順一/日本評論社)という本にとっても面白く書かれています)