

11 サインのルーツを探る

単元等 数学 I 図形と計量 (三角比と計量)

数学史

◆Contents

- ・ 伊能忠敬とペリー
- ・ アルマゲストと正弦の表
- ・ sine の由来

1 授業の内容

(1) 三角比を利用して高さなどを計量する

(2) 三角比の相互関係

2 授業を見ての所感

先日は個別訪問で、授業を見せていただきありがとうございます。教科書の重要事項や公式の板書を、色チョークを使うなどしてわかりやすく示したり、期間巡視による個別指導を積極的に行い個々の生徒のつまづきへのフォローをしっかりと行っていたことがとても印象に残っています。途中、ペリーと伊能忠敬のエピソードを入れ、興味を喚起するなどの工夫もよかったですね。最後に定着を確認したところ、ほぼ全員の生徒が、本時の解くべき問題をクリアしていたので、生徒もわかったという実感を持てた授業だったと思います。そういう意味では、習熟度（少人数）の良さが出たのかもしれない。ありがとうございました。

3 補足すること

さて、私は、個別訪問を行った先生に対し、主に教材研究ネタなどの話題を提供させていただいております。今回は、三角比について、特に歴史的な部分について触れてみようと思います。

■ 伊能忠敬とペリー

先生が授業の中で『黒船によって浦賀に訪れたペリーは、伊能忠敬が作った地図を見て、非常に驚き、日本で地図を作る作業を急遽取りやめ、本国に帰った。帰国後、日本はアメリカにとって脅威の国になるだろうと報告した』という話にとて

も興味を持ちました。「学問の力」は、時に武力を凌ぐという例として紹介したい逸話だと思います。

調べると、伊能忠敬の測地については、

「おもしろ地図と測量」（オフィス地図豆）

(<http://www5a.biglobe.ne.jp/~kaempfer/index.html>) というサイトに、とても分かりやすい紙芝居仕立ての解説ページがありました。

それを見ると、地図を作るには、距離や角度の正確な測定だけでなく、相似や三角比の概念、そして天文学と多くの分野が関わっていることがわかります。

私は、数学の教師という立場として、生徒に読ませたい本の一つに「天地明察」（沖方丁）をあげます。江戸時代の天文学者（であり碁打ちで数学オタク）渋川春海の生涯を描いた時代小説で、春海が全国を測量し、日本の新しい暦法を策定するまでの過程が見事に描かれています。関孝和などの和算家も登場しますが、あらためて、江戸時代の日本の優れた知性に感動を覚えます。

私たちは、三角比どころか、三角関数の加法定理や合成、はたまたその微分など、江戸時代の人々から見れば比べ物にならない程の知識を高校の段階で身につけます。しかし、果たしてそれが、どれほど自分が生きていくための知恵につながっているのでしょうか。あるいは、その知識がどれほど自分の人生を充実させるものになっているのでしょうか。もしかすれば、自らの純粋な知的欲求によって思索し、多くの経験を積み重ねることによって生み出されてきた、彼らの知識と知恵は、我々の及ぶところではないのかもしれない。

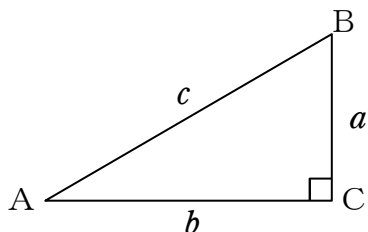
物理学者マイケルファラデーは「私は自分で見たこと、経験したこと以外は信じない」と言いましたが、シニカルな見方をすると、今の子どもたちは「見たことも、経験したこともないことを次々と信じている」のかもしれない。

■ アルマゲストと正弦の表

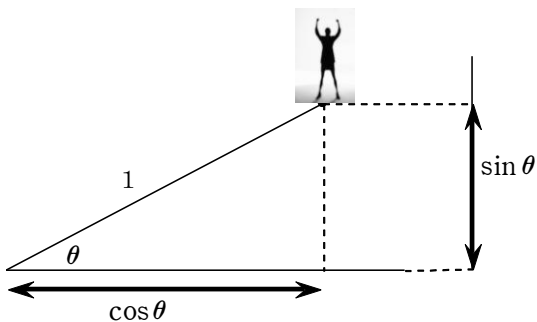
なんとなく、三角比とは「直角三角形の2辺の比」のこのような気がしますが、実は教科書にはそのようなことは書かれていません。

教科書では「正弦、余弦、正接をまとめて三角比という」となっていて、微妙に「三角比」という言葉の定義を回避しているように思います。

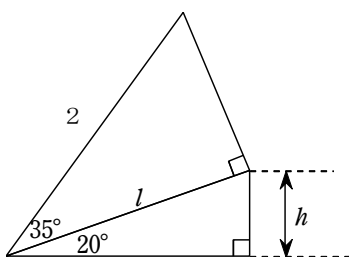
小学校では「比」と「比の値」を厳格に区別しているのです、仮にそのような立場で、三角比を「三角形の辺の比」と定義した場合、図において、 $\sin A$ は $c:a$ ということになり、量(値)ではなく、比をとる操作そのものが $\sin A$ と捉えられてしまうような気がします。



下図のように、傾きが θ の坂道を1だけ進んだ時の高さを $\sin \theta$ と定義しておけば、量としてのイメージをつかむと思います。



例えば、次の図で、高さ h を求める場合、上で述べたことを理解していれば、



$$l = 2 \cos 35^\circ \quad h = l \sin 20^\circ \text{ から}$$

$$h = 2 \cos 35^\circ \cdot \sin 20^\circ \quad (\text{以下略})$$

という値(量)であることがすぐわかりますが、比の呪縛から離れられない生徒は、

「上側の三角形で2と 35° がわかっている、 l を求めたいので、コサインを使う。

$\cos 35^\circ = 2 : l$ から $l = 2 \cos 35^\circ$. 次に下側三角形を見て、サインがイメージできるので、

$$\sin 20^\circ = l : h$$

$$\text{よって } h = l \sin 20^\circ = 2 \cos 35^\circ \sin 20^\circ$$

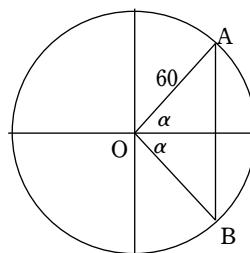
というように、計量というより代数計算の問題になってしまうと思います。

では、教科書の定義「正弦、余弦、正接をまとめて三角比という」にもう一度戻ってみます。これを見ると、三角比とは何かを知るには、正弦、余弦、正接とは何かを調べる必要があります。

そこで、ここでは、正弦のルーツについて述べてみようと思います。

現在、教科書の巻末に載っている三角比の表の原型は、紀元2世紀半ば頃に、ギリシャの数学者トレミー(Ptolemy プトレマイオスともいう)が記した書「アルマゲスト」に見ることができます。アルマゲストはコペルニクスの「天球回転論」、ニュートンの「プリンキピア」と並んで天文学の三大古典と呼ばれています。

トレミーは、アルマゲストの中で、図のような、半径60の円の中心角 $\angle AOB$ に対する、弦ABの長さを、0.5刻みの角に対して計算し、表をつくりました。この表を利用して天体の測量を行ったといわれています。



正弦とは辺の比ではなく、文字通り「角に正対する弦の長さ」のことだったわけです。

■ なぜ sine と呼ぶようになったか

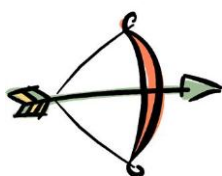
sin (sine) の語源は、いろいろな学者が諸説をのべていますが、ここでは、数学史の大家である片野善一郎氏の「数学用語と記号物語」から引用させていただきます。

『英語の辞書には sine の訳語は正弦だけしか書かれていませんが、sine に使い sinus という言葉が辞書にあります。この意味は“曲がり、湾曲”などとなっていますが、西洋人がアラビア人から正弦を教わったとき、ラテン語で胸 (sinus) を意味する言葉の様に呼んでいたのです。それが sine になったわけですが、これには次のような経緯があります。

ギリシャの天文学はインドへ伝わったわけですが、インドの数学者アリアバタは弦の表を使いやすい半弦の表に作り直しました。〈中略〉

インド人はこの半弦を ardha (半分) -jya (弦) と呼びましたが、最初の ardha がときに省略されて、弦 (jya, jiva) と呼ばれることがありました。

インドの半弦がアラビアへ伝えられたとき、同じ意味のアラビア語で jiba と訳されました。ところが、アラビア語の単語はしばしば母音を省略して書かれることがあったので、jiba が jb から jaib と間違っ書かれたということです。ところが、jaib は弦の長さとは無関係の言葉で“首と胸で衣服を開く”という意味だったため、その言葉をアラビア人から教えられた西洋の数学者は、jaib の意味に近いラテン語の sinus (胸) と訳してしまったのです。そしてこれから sine という用語が作られたというのです』



COFFEE BREAK 5



授業を見つめなおそう うがく通信2号より

今、学力問題だけでなく、不登校や非行など様々な学校課題を、教科指導・授業力を推進力しながら解決していく取り組みが各所で行われています。なぜなら、学校での諸問題は、現場で「わかる授業」や「魅力ある授業」が行われていないことに起因しているからです。

数年前に出版され話題を呼んだ「ごまかし勉強」という本をご存じの方も多いかと思います。今回は、この本から、ごまかし勉強とは何か、そしてごまかし勉強がはびこることにより、教育現場がどのような状態になっているかを、著者の藤澤伸介氏(跡見学園女子大学教授)の言葉を借りながら説明したいと思います。

ごまかし勉強とは「一時しのぎ、間に合わせの勉強のことで、見せかけの学力を形成するもの」と定義されています。特徴としては、「勉強の範囲を限定する(意味を考えない・発展的に考えない)」「自分の頭で考えず、指定されたもののみ記憶」「実力がつく方法を考えずただ量をこなす」「過程より結果を重視」といったものです。当然テスト後には知識として定着することはなく「憶えてはテストをして忘れ」をひたすら繰り返す勉強法であると述べられています。

また、正統的な学習では、達成感が得られ、それが次の学習への動機につながるのに対し、ごまかし勉強で獲得される学習観は「暗記主義」「物量主義」「結果主義」というもので、学習の動機は「テストに出る」とか「将来のために我慢」といった

他律的なものになり、悪循環が生まれていくことになります。

ここで重要なことは「ごまかし勉強」は生徒だけの責任で生じているのではないということです。例えば、進学校においては、「受験」を唯一の学習動機にして、大量ドリルや、教科書を早く進むための公式つまみ食いプリントを与えたり、模試対策を基準とした授業を行うことが「ごまかし勉強」を後押しし、結果として実は定着を阻害している可能性も考えられます。

また、「この生徒たちは能力が低いから」という一言で、定理や公式の証明を省略し、簡単な穴埋めプリントや、計算ドリルでお茶を濁す授業を行う教師の側と、つまらなくて眠ってられる授業の方が張り切っている先生よりラク、テスト直前に先生が配る対策プリントがあれば授業は熱心に受けなくても大丈夫、などという先生と生徒間の「マイナス志向による利害の一致」ともいべき深刻な問題も様々な人から指摘されています。更に、「ごまかし勉強」が進むと次のような悲しい状況が生み出されると本には記されています。

(●=点検が厳しくない：▼=点検が厳しい)

- | | |
|-----------|---|
| ①宿題 | ●忘れましたといってやらない |
| | ▼まじめにやった人のを写す |
| ②教材 | ●忘れましたといって持参しない |
| | ▼隣のクラスから借りる |
| ③授業中の問題演習 | |
| | 「わかりません」といって考えない。教師が正答をいうまで待ってノートに記入しテスト用に暗記。 |
| ④授業の聴講態度 | |
| | つまらないものにつきあっているのだからという根拠で、私語、手紙まわし、マンガ講読、ギャグ妨害、落書きなどで楽しくする。周囲への迷惑を叱責されたら寝てしまう(下巻 P.75)。 |

(参考・引用「ごまかし勉強」上下巻(新曜社))