

10 分数の割り算はなぜひっくり返してかけるのか

単元等 数学 I 図形と計量 (三角比)

◆Contents

- ・ $\sin \theta = \frac{3}{5}$ の意味
- ・ 分数の割り算

1 授業の内容

- (1) 導入 (前時の復習)
- (2) 三角比の相互関係 (鈍角) の説明
- (3) 練習問題とまとめ

2 授業を見ての所感

先日は個別訪問での授業ありがとうございました。また、展開案だけでなく生徒観や指導計画、評価規準まで含めた指導案を作成いただきました。忙しい中ご苦労をおかけしました。

先生の授業を拝見して、生徒がとても生き生きとして授業に臨んでいるということを感じました。先生の説明だけで終わるのではなく、生徒との対話、生徒間の学びあいの活動などがとても有機的に行われた授業で、普段から生徒ととても良い関係を築かれているのだと推察いたしました。

また、 x ではなく本当は $|x|$ とか、 $\sin \theta \geq 0$ の条件など、生徒が見落としがちな部分に対し、きめ細かい指導をされていたことにも感心しました。

N 高校では、各教科研究授業を定例的に行い、授業風景をVTRに撮るといった活動をされているということで、とても素晴らしいことだと思います。

私たちは、数学教師であり、授業の中で数学を教えるわけですが、実際はそれだけではなく、授業を通して生徒の人間性を向上させることや、クラスの良い集団作りを行うことも授業の果たす役割ではないかと思えます。

そういう意味で、副校長先生がおっしゃっていたように、他教科の授業を観て学びあうという活動はとても大切なのだらうと思いました。

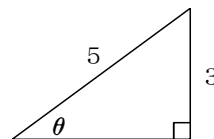
3 補足すること

私は、授業を行った先生に所感として、主にその授業に関する教材研究ネタを送らせていただいております。今回は、三角比が題材なのですが、少し趣向を変えて、分数について考えてみたいと思います。

研究協議の中で述べた角の定義や三角比に関する話題は、D 高校と H 高校の「所感」ファイルをあわせて添付いたしましたので、それをご覧いただければ幸いです。

■ $\sin \theta = \frac{3}{5}$ の意味

研究協議の際に、山田先生が言われた $\sin \theta = \frac{3}{5}$ の話について触れたいと思います。



私たちは、図において、

$$\sin \theta = \frac{3}{5} \text{ であるということ}$$

とは教えます。

しかし、この $\frac{3}{5}$ とはどのような意味なのか、どこにある数なのかについてはあまり意識して教えていないのではないかと思います。

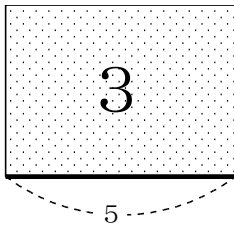
ドイツの生んだ有名な数学者クライネ (1849~1925) は「分数には『関係』『操作』『量』という3つの意味がある」と述べ、分数の指導の難しさを指摘したそうです。

確かに、私たちは、筆記体のSなどを使って三角形上で、ある「操作」を行い、三角比の2辺の

「関係」として $\frac{3}{5}$ を出すのですが、そこで留まってしまうように思います。

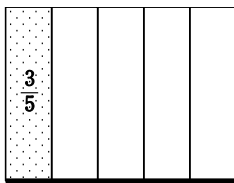
そこで、まず、 $\frac{3}{5}$ とは、そもそもどういう数であるのか、考えてみましょう。

$\frac{3}{5}$ を、 $3 \div 5$ の商ととらえたとき、この商の意味を次のような図によって表現してみます。

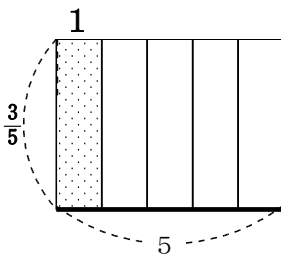


左図のように、長さ5の土台の上に面積が3の長方形が載っているとします。

ここで、土台を1にし



たときの「1当たりの量」が $\frac{3}{5}$ (=0.6)を表しています。

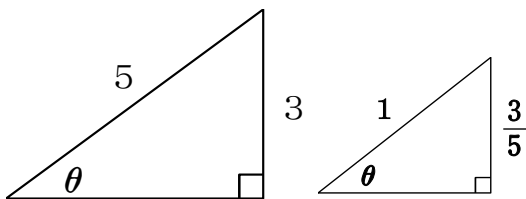


更に「1当たり分の面積」を「長方形の縦の長さ」という量としてみることもできます。

では、三角比に戻しましょう。

まず、操作によって三角形の2辺の関係式

$$\sin \theta = \frac{3}{5} \text{ が得られました。}$$



ここで、 $\frac{3}{5}$ とは、土台である斜辺を1にしたときの量なので、図のような斜辺1の直角三角形に繋げて考えるのが自然です。

つまり、斜辺が1のときの、対辺の長さという

量として $\sin \theta = \frac{3}{5}$ が意識されたわけです。

■ 分数の割り算はなぜひっくり返して掛けるか

例えば、 $\frac{7}{4} \div \frac{9}{5}$ に対して、 $\left(\frac{7}{4} \times \frac{5}{9}\right) \div \left(\frac{9}{5} \times \frac{5}{9}\right)$

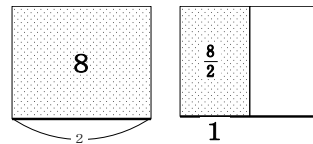
とすれば、 $\frac{7}{4} \div \frac{9}{5} = \frac{7}{4} \times \frac{5}{9}$ が自動的に得られま

す。ただ、これだと、「割られる数と割る数に同じものを掛けても商は等しい」ことを自明として、操作や法則を用いて説明しているだけなので、子どもから見れば、手品を見ている感じで、納得はしても意味が落ちてこないような気がします。

実際、数学的にきちんと示すには、 $ax = b$ となる x を $\frac{b}{a}$ と定義して考えるのですが、準備がたくさんあり、おおごとになってしまう割愛します。

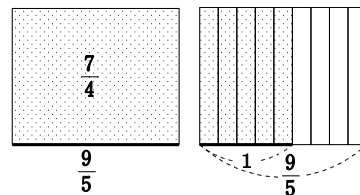
そこで、先ほど述べた、割り算を長方形の面積を求めるイメージで考える方法で、この意味を考えたいと思います。

まず、 $8 \div 2$ の意味を考えます。これは、2という土台の上に面積8の長方形がのっているときの、1当たり分の面積を求めることです。



では、 $\frac{7}{4} \div \frac{9}{5}$ を考えます。これは、 $\frac{9}{5}$ の土台に、

面積 $\frac{7}{4}$ の長方形がのっているときの1当たり分を求めればいいですね。



図のように、1当たりの量は、 $\frac{7}{4}$ を9つに分けた

(1/9倍した) 5つ分なので、 $\frac{7}{4} \times \frac{5}{9}$ となるこ

とがわかります。