

9 角の概念には2つの側面がある
単元等 数学 I 図形と計量 (三角比の拡張)

◆Contents

- ・角の二面性
- ・単位円による角の再定義
- ・方程式不等式を解く

1 授業の内容

- (1) 導入 I (三角比の定義の確認)
- (2) 導入 II (三角比の拡張)
- (3) 三角方程式を解く

2 授業を見ての所感

先日は、大変お忙しい中、授業力向上セミナーでの授業を行っていただきありがとうございました。先生の非常にきれいでわかりやすい板書に感心いたしました。また、生徒の授業に取組む雰囲気から、日頃から生徒と良い関係を築かれているのだなあとあらためて思いました。

私は、個別訪問やセミナーで授業を実施された先生に対して、所感を作成して送付しております。(授業の内容に関わることよりも教材研究のネタや数学的な背景などについての話題が中心です)

というわけで、三角比の拡張に関していくつか話題提供をさせていただきたいと思います。

■ 「角」の二面性

高校での三角比や三角関数の指導について最近私が考えている問題点について述べたいと思います。それは「角」の概念に関するものです。

「角」は小学校から高校まで継続的に扱われています。ちなみに小・中学校では以下のような流れになるかと思えます。

第2学年：三角形や四角形を抽象する。図形を動かすなどの操作から図形の見方の素地を学ぶ。

第3学年：正方形・長方形・直角三角形などの性質を学ぶ。

第4学年：二等辺三角形・正三角形などの理解から、角の相等や「図形の構成要素」としての角の大小比較などを行う。一方、角を「開きの大きさを表す量」として捉えてその大きさを測定する単位として「度」が用いられることを学習する。

第5学年：図形を観察・構成することを通して平行四辺形や台形などを学ぶ。図形の構成要素である角や辺、頂点などに着目し図形の理解を深める。三角形の内角の和が 180° であることを学ぶ。

中学1年：基本的な作図方法を、対称性や、図形を決定する要素に注目する中で平面図形の理解を深める。角の二等分線の作図を行う。

中学2年：図形を題材にした論証を扱う。平行線における同位角・錯角などを学ぶ。対頂角の相等で「図形上での角の差」が定義されたり、多角形の外角の和を求めるあたりに「回転の大きさとしての角」の概念が垣間見られる。

(参考：宇都宮大学教育学部教育実践総合センター紀要第30号)

上で示したように、「角」の概念は「図形の構成要素」と「回転の大きさを表す量」という二面性を持つものであるにもかかわらず、流れとして「図形を構成する要素」の一面で捉えたまま、高校での三角比の拡張や三角関数を指導している教師が多いというのが私の問題意識です。

■ 単位円による角の再定義

私はセミナーの中で「角はある意味ベクトルである」という話をしました。それは、「角は回転の向きと大きさを持つ加法性を満たす量」として捉え直さない限り三角関数を概観することができないからです。

例えば、五角形の内角の和は、3つの三角形に分割できることから $180^\circ + 180^\circ + 180^\circ = 540^\circ$

とするわけですが、この場合の 540° とはベクトルでいえば「大きさ」の代数和ということです。角をベクトルで捉える場合は、 540° とは始線から正の向きに一回転して更に半回転進んだところに動径が位置する場所（更に弧度法になれば1回転半したときの、単位円の弧の長さ）と動的に考えなければなりません。

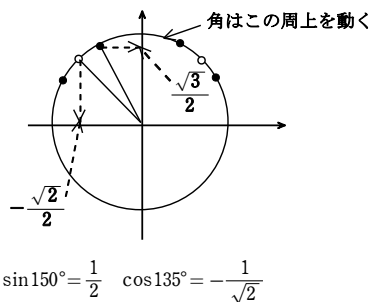
数Ⅰの、角の拡張の場面は、角の概念を見直し、三角関数へと橋渡しをする絶好の機会であると思います。先生は「始線」「動径」という言葉を敢えてここで導入され、角とは「始線を基準にした単位円上の動径の回転量」であるとして、ビジョンを持った指導をされていました。

ところが、単位円を回避する先生が本当に多いのが現実です（セミナーでも単位円で指導する必要があるのかという声もありました）。

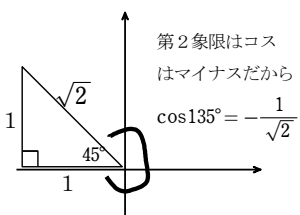
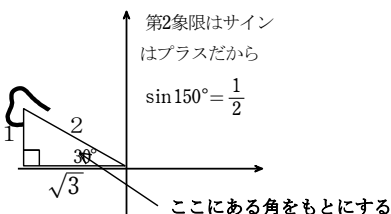
単位円を用いる場合と用いない場合の指導の比較をしてみたいと思います。

【 $\sin 150^\circ$, $\cos 135^\circ$ を求める場合】

<単位円で指導する場合>



<単位円否定派の指導法>



単位円の場合は、円周上に角の位置を考えることになるので、角の変化にもよって、サインやコサインが変化していくことが自然に納得できます。

単位円否定派の場合は、斜辺の長さが統一されていない直角三角形を埋め込んで考えるため、動的なイメージがつかめません。

また、下図のような表（単位円で考えれば不必要）を更に使って符号を決定するという無駄なステップを踏むことにもなります。

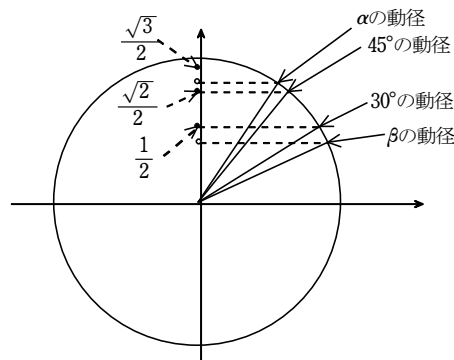
サイン	コサイン	タンジェント
+	-	-
+	+	+
-	-	+
-	+	-

今度は次のような問題を考えてみます。

$\sin \alpha = \frac{3}{4}$, $\sin \beta = \frac{2}{5}$ (α , β は第1象限の角)
 のとき $\alpha - \beta$ はどの程度の大きさの角か。

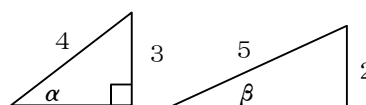
このような問題で生徒がどのようなイメージを持つでしょうか。

<単位円で考える場合>



図からただちに $15^\circ < \alpha - \beta$ がわかる。

<単位円で考えない場合>



三角比を値と見る意識がないので角の大きさの比較が難しい

■ 三角方程式は「3手詰め」

最後に、単位円で三角方程式を考える際のポイントを示しておきたいと思います。

基本は

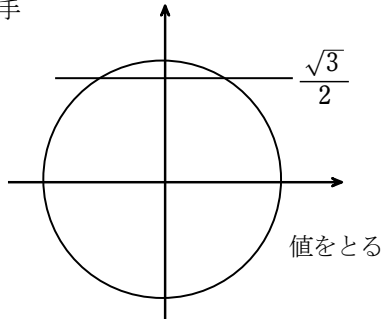
- ① 値をとる
- ② 動径を描く
- ③ 角を読む

の3手詰めです。

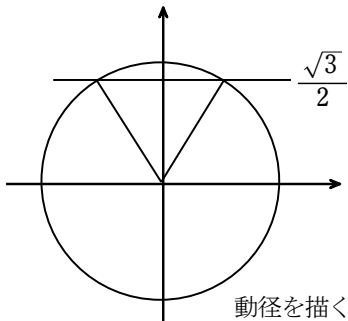
例 $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ($0 \leq \theta \leq 180^\circ$)

の場合

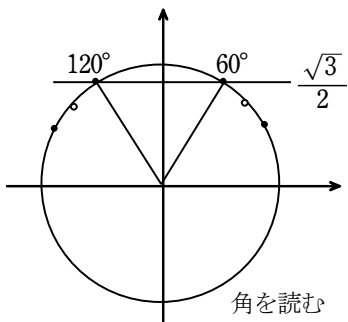
初手



第二手

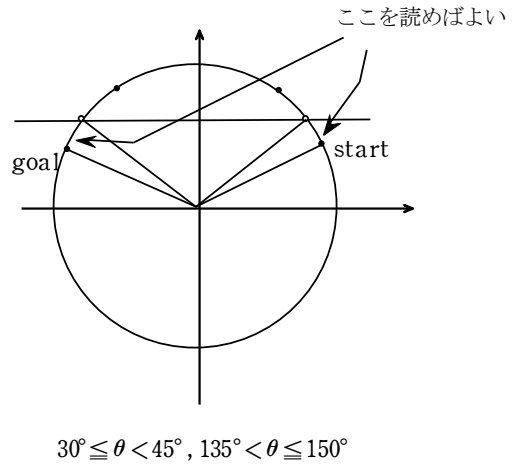


第三手



また、不等式の場合も単位円を用いると考えやすいと思います。

例 $\sin \theta < \frac{\sqrt{2}}{2}$ ($30^\circ \leq \theta \leq 150^\circ$)



長々とすみませんでした。

では、単位円で教える先生が増えることを祈りつつペンを置きます。

COFFEE BREAK 4



数学的活動とは

■ 数学的活動について

①高等学校数学科の目標

数学的活動を通して、数学における基本的概念や原理・法則の体系的な理解を深め、事象を数学的に考察し表現する能力を高め、創造性の基礎を培うとともに、数学のよさを認識し、それらを積極的に活用して数学的論拠に基づいて判断する態度を育てる。(高等学校指導要領)

②高等学校数学科の目標の改善点

1 点目は、「数学的活動を通して」の部分で小学校及び中学校と同様、文頭に出したことである。数学的活動とは、数学学習にかかわる目的意識を持った主体的な活動のことであるが、今回「数学的活動を通して」の部分で文頭に出し目標全体に関係させることで、数学的活動を一層重視する意図を表現した。(高等学校指導要領解説 P.5 解説の要旨)

③数学のよさ

今回の改訂では、中学校と高等学校では「数学的な見方や考え方のよさ」を「数学のよさ」に変更した。「数学のよさ」とは、数学的な見方や考え方のよさ以外に、数学の概念や原理・法則のよさ、数学的な表現や処理のよさの仕方を含み、さらに高等学校では、数学の実用性や汎用性などの数学の特長、数学的活動や思索することの楽しさなども含んだものである。

(高等学校指導要領解説 P.17 数学科の目標)

④数学的活動

数学的活動とは、数学学習にかかわる目的意識を持った主体的な活動のことであるが、第3款の3で規定しているように、高等学校では特に次の活動を重視している。

- ・ 自ら課題を見出し、解決するための構想を立て、考察・処理し、その過程を振り返って得られた結果の意義を考えたり、それを発展させること。
- ・ 学習した内容を生活と関連付け、具体的な事象の考察に活用すること。
- ・ 自らの考えを数学的に表現し根拠を明らかにして説明したり議論したりすること。

なお、数学的活動は、コンピュータを積極的に活用することによって一層充実したものに行うことができる。(高等学校指導要領解説 P.16 数学科の目標)

⑤中学校における数学的活動

「数学的活動の楽しさ」については「数学のよさ」とともに「実感」することとしている。これは、これまで以上に情意的な側面を大切にし、数学を学ぶことへの意欲を高めるとともに、数学的活動に主体的に取り組むことができるようにし、数学を学ぶ過程を大切にすると趣旨によるものである。すなわち、単にできあがった数学を知るだけでなく、事象を観察して法則を見つけたり、具体的な操作や実験を試みて数学的内容を帰納したりするなどして、数や図形の性質などを見出し、発展させる活動を通して数学を学ぶことを重視するためである。さらに活動を通して数学を学ぶことを体験する機会を設け、その過程で様々な工夫、驚き、感動を味わい、数学を学ぶことの面白さ、考えることの楽しさを味わえるようにすることが大切である。(中学校指導要領解説 P.17~18)