8　興味を持たせる２次方程式の指導

単元等　数学Ⅰ　二次方程式

◆Contents

・ニュートンの近似解法

・平方完成と面積の正方形化

・二次方程式と黄金比

1　授業の内容

２次方程式の応用として，面積の問題（教科書例題 20 と練習 50）を説明・解説する．

【例題 20】

> 縦の長さより，横の長さの方が２ｍだけ短い長方形の土地がある．この土地の面積が $11\mathrm{m}^2$ であるとき，縦の長さと横の長さをそれぞれ求めよ．

2　授業を見ての所感

先生は，終始にこやかで，しっかり生徒を見て授業を行っていたのがとても良かったと思います．

また，２次方程式を解くにあたって，「まず因数分解できないか考える．できないときはオールマイティの切り札として解の公式を使う」とか，問題を解く際に「具体的な数値を入れて様子を探る」とか，問題文に現れる土地を具体的に紙板書によって提示する・・・などといった，丁寧な説明を行おうという姿勢が感じられました．

生徒の学ぶ姿勢も良かったと思います．

3　補足すること

私は，個別訪問の際，授業者の先生に，事後に，教材研究ネタを提供することにしています．今回は, ２次方程式の面積に関する文章題についてこんな教材はどうかということで，少し述べさせていただこうと思います．

数値を代入することについて

例題 20 の問題で，まず，先生は具体的な数値を入れて計算してみました．

① 縦を 5m とすると横は 3m だから
　面積は $15\mathrm{m}^2$

② 縦を 4m とすると横は 2m だから
　面積は $8\mathrm{m}^2$

面積は $11\mathrm{m}^2$ だったから，求める縦の長さの値は 4m と 5m の間にありそうだ！

いきなり，教科書の解法をなぞるのではなく，このように考えることは，解を求める動機づけにもなり，とても良いと思います．

更に，生徒から「じゃあ縦は 4.5m ではどうだろう」という考えなどが引き出せれば面白かったかもしれませんね．実際 $4.5\times2.5=11.25$ となり問題の $11\mathrm{m}^2$ にかなり近い値になります．

実際，解は $1+2\sqrt{3}$ というわかりにくい値なので，ルートを近似して 4.5 と比較してみれば，生徒は納得できるのではないかと思います．

このように区間を狭めながら解を求めていく方法は古くはニュートンが用いた手法です．

例えば，$x^2=5$ の解，つまり $\sqrt{5}$ の近似は次のように考えます．

【$\sqrt{5}$ を求める】

$x^2=5$　である………※

$x=2$ とすると足りない　$x=3$ とすると大きい

$x=2.2$ とすると，$x^2=4.84$ でおしい！

そこで，$x=2.2+\varepsilon$ とする．（ε は0.1よりも小さい）

これを※に代入すると　$4.84+4.4\varepsilon+\varepsilon^2=5$

$4.4\varepsilon+\varepsilon^2=0.16$　………※※

ここで大胆なことをする．

ε は０に近い数なので，ε^2 はもっともっと０に近いはずだ．そこで思い切って $\varepsilon^2=0$ としてみる．

すると※※より　$\varepsilon=\dfrac{0.16}{4.4}=0.03636\cdots$

つまり，$x=2.2+0.03636\cdots=2.23636\cdots$ とできた．

そこで今度はあらためて

$x=2.236+\varepsilon$　とおく（ε は0.001より小さい）

これを先ほどと同じように※に代入すると．

$2.236^2+4.472\varepsilon+\varepsilon^2=5$

ここで ε^2 はもっともっともっともっと０に近いはずなので

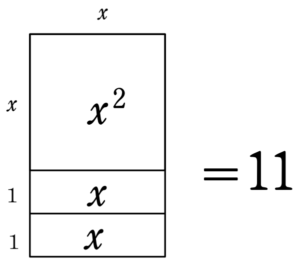
$\varepsilon^2=0$ として解くと，$\varepsilon=0.0000679785\cdots$

よって，$x=2.2360679785\cdots$　となる．

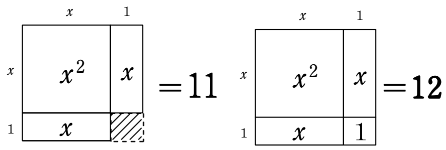
このような操作を続けていけば相当いい近似が得られ，誤差の範囲もわかる．

平方完成と面積の正方形化

教科書の解答では，縦の長さを x とおいていましたが，今度は横の長さを x として，面積図で考えてみたいと思います．



図において，左辺の長方形を正方形に変形します．下図の網掛けの部分（面積１）がかけているので，それを両辺に足すと，左辺がめでたく正方形になります．



$(x+1)^2=12$　より　$x=-1+2\sqrt{3}$

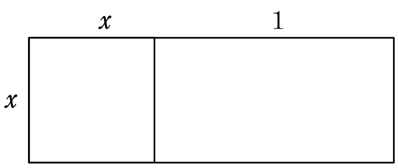
つまり，長方形を正方形化して一辺を求めることは，式で言うと平方完成して方程式を解くということにあたることがわかります．

黄金比へ

例題 20 を変形して次のような問題を考えてみましょう．

【例題 20’】

縦の長さより，横の長さの方が 1 mだけ長い長方形の土地がある．この土地の面積が $1\mathrm{m}^2$ であるとき，縦の長さと横の長さをそれぞれ求めよ．
縦の長さを x とおいて求めてみましょう．

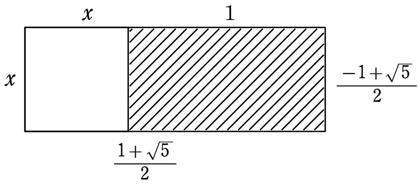


$x(x+1)=1$ より

$x^2+x-1=0$

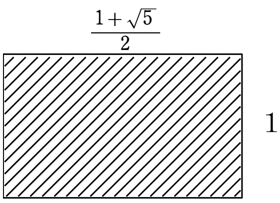
$$x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\quad (x>0)$$

よって縦　$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$　横　$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$



ここで，$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ は黄金比と呼ばれる値で，約 1.6 です．2 次方程式の単元では，自然や芸術に潜む数として黄金比を紹介して欲しいところです．

さて，上図斜線部分の，長方形の縦が 1 になるように拡大してみます．すると下図のように，横の長さに黄金比が現れました．



縦横の比が黄金比になる長方形を黄金長方形と呼びます．これは，名刺の縦横のサイズなどにも表れる比です．更にこの長方形から横の長さ 1 を 1 辺とする正方形をとり除くと，下のような打点部分の長方形ができます．

これは，最初の図の，斜線部分の長方形になっていますね．このような操作をつづけて黄金長方形をどんどん作ることができます．