

7 2次関数には3つの顔がある

単元等 数学I 二次関数(グラフ)

◆Contents

- ・2次関数の式の表現
- ・2乗比例関数としての重要性質

1 授業の内容

- (1) 平方完成の復習
- (2) $y = ax^2 + bx + c$ のグラフを描く

2 授業を見ての所感

先日はお忙しい中、個別訪問で授業を見せていただきありがとうございます。先生の授業を見て、

- ◆時間確保のため練習問題の解答を用意し全員に配布していたこと。
- ◆全員での公式の暗唱や、教えあい・学びあいの活動を入れていたこと。
- ◆先生の説明の声が大きく聞きやすかったこと。などの点について、とても参考になりました。また、生徒がとても意欲的に取り組んでいることにもとても感心しました。日常の先生の指導がよく行き届いているのだと感じました。

研究会では、学力向上や学力差への対応のためには、数学科として取り組むべきこと(科内の連携、授業力向上、個別指導や宿題の実施等)と、学校全体で取り組むべき課題(部顧問や学年会による家庭学習などの働きかけ、T.Tや習熟度ができような環境整備(定員増等))に分けて検討することが必要であるということをお話させていただいたところです。

今後の更なるご活躍をお祈りいたします。

3 補足すること

私は、授業者の先生に対し、「所感」という名目で、教材研究ネタを作成し配信しておりました。今回は、2次関数のグラフについて、いくつか思うところを述べたいと思います。

■ 2次関数には3つの顔がある

私は、「服装でも、学校や仕事場、運動競技などで着る『フォーマル型』のユニフォーム、パーティーやデートに着ていく『ゴージャス型』の勝負服、家にいるときなどの『カジュアル型』のくつろぎ服というように、服装には3つの顔がある。」なんていう話をしながら、「2次関数にも3つの顔がある」という話をよくします。

- ① $y = ax^2 + bx + c$ 型 (一般形)
- ② $y = a(x - p)^2 + q$ 型 (標準形)
- ③ $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$ 型 (因数分解形)

服装もTPOにあわせて使い分けるように、上の3つのタイプの2次関数も、問題によって使い分けていくことが肝心です。

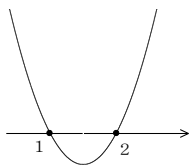
では、それぞれの良いところ(◎)と欠点(▼)をまとめておきたいと思います。

- ① 一般形
 - ◎方程式との関係で考えることができる。
(解の公式や、判別式などを活用できる)
 - ◎切片の座標がすぐわかる
 - ◎微分がしやすい
 - ▼グラフを描きにくい。
(頂点や軸の方程式がわからない)
- ② 標準形
 - ◎グラフが描き易い形である
(頂点、軸の方程式がわかる)
 - ▼変形するのに手間がかかる
- ③ 因数分解形
 - ◎ x 軸との交点がすぐわかる
(グラフの概形がすぐ描ける・2次不等式の解を求め易い)
 - ▼有理数の範囲で因数分解できない場合もある
この2次関数の使い分けは、関数の方程式の決定や、2次不等式の解法の場合などで特に重要になってくるように思います。

例えば、次のような2次不等式を解く場合を考えてみましょう。

(1) $x^2 - 3x + 2 < 0$

これは③で考えグラフを描けばよい。
つまり、 $(x-1)(x-2) < 0$ として、

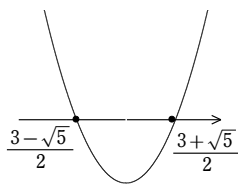


グラフから解が得られます。

(2) $x^2 - 3x + 1 < 0$

これは因数分解ができないので、①で考える。

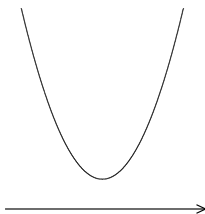
$x^2 - 3x + 1 = 0$ を解の公式で求めて



グラフと x 軸との交点を決定すればよい。

(3) $x^2 - 4x + 5 < 0$

これは、標準形に変形し易い形 (②) なので、
 $(x-2)^2 + 1 < 0$ としてグラフを考えるのが



一般的。
図から、解なしとわかります。

(4) $3x^2 - 5x + 3 > 0$

これを平方完成するのは大変です。
解の公式を使うと実数解がでてこないで、
①から判別式を利用して、グラフと x 軸との位置関係を考えることを選択します。

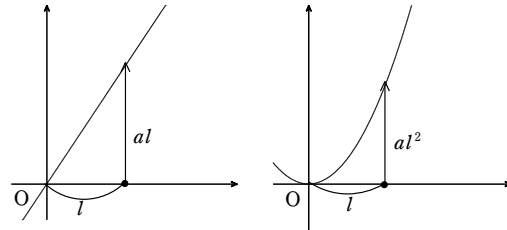


$D = 25 - 36 = -11 < 0$
よって、グラフからすべての実数とわかります。

2次不等式を解くときに、式の形から解法パターンを分類していくのではなく、まず、すべての問題に「グラフを利用する」という共通の考え方があり、その上で「グラフには3つの顔がある」ので、どれを使えば、 x 軸との交点や位置関係を調べることができるか、ということを考えるべきだ、ということ述べたいために、以上の4つの問題を取り上げてみました。

■ 2乗比例関数としての重要性質

正比例を表す関数、 $y = ax$ に対して、 $y = ax^2$ は、式からもわかるように、2乗に比例する関数という見方ができると思います。

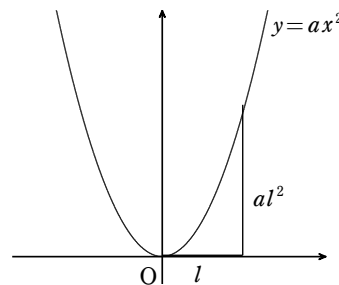


このような2乗比例の法則は、ガリレイの示した落体の運動や、速度とエネルギーなど、様々な自然現象に見られるものです。

では、このことを念頭において、2次関数の重要性質を導いてみましょう。

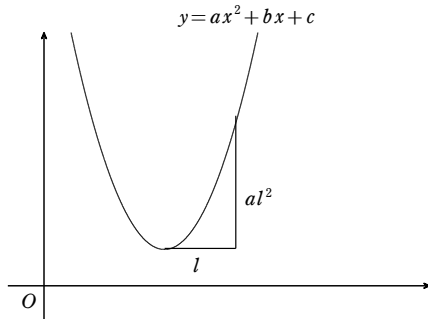
<手順①>

2乗比例から図のような関係が成り立つ。



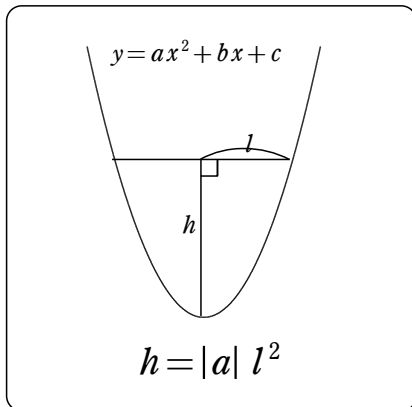
<手順②>

グラフを平行移動してもその性質は変わらない。



<手順③>

以上より一般の2次関数では、次の関係式が成り立つ。



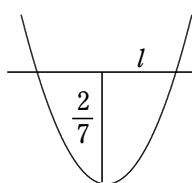
(上に凸の場合も考慮して、絶対値をつけています)

では、この性質を利用していくつかの問題を考えてみたいと思います。

例1 $y = \frac{2}{3}(x-1)^2 - \frac{2}{7}$ が x 軸を切り

取る長さを求めよ。

解答



図から

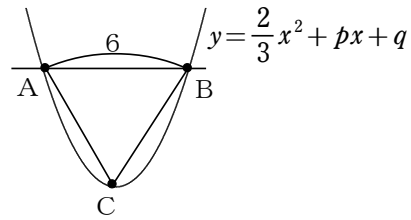
$$\frac{2}{7} = \frac{2}{3}l^2$$

$$l^2 = \frac{3}{7}$$

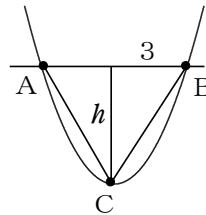
$$\therefore l = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

よって、切り取る長さは $\frac{2\sqrt{21}}{7}$

例2 図において、 $\triangle ABC$ の面積を求めよ。



解答



図で、 $h = \frac{2}{3} \times 3^2 = 6$

よって、 $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18$

この話をすると、生徒や先生から次のような質問を受けることがあります。

「テストでこの公式を使って良いのか」

私は、次のように話しています。

「 $h = al^2$ を公式として覚えるのではなく、2乗に比例する関数の基本性質として理解していなければいけない。

だから、このような解法は公式による、ずるい手段ではなく、2次関数の性質をしっかりと理解した上でのものであるはずだ」

COFFEE BREAK 3



私の薦めるこの一冊 ～その3～

-
- 数学とは何か／R. Courant
H. E. Robbins 訳：I. Stewart
森口繁一（岩波新書）



数学の様々な分野の基本
概念が系統的に書かれて
いる。数学というと「解析」
「線形代数」など分野ごと
に、独立に勉強することが
多い。その中で、専門性は磨かれるが、横
断的に数学を見渡すことができないという
欠点もある。この本は、古典から現代まで
の数学グラフィティとして、高いところから
数学全体を鳥瞰することができる本であ
る。

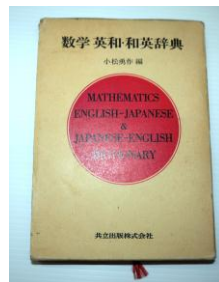
- The Mathematical Experience
／P. J. Davis・R. Hersh
訳：柴垣和三雄・清水邦夫・田中裕（森
北出版）



格調が高く、非常に
難解で読み進むのが
大変である。しかし、
数学とは何かという
命題に対して、正面
から大上段に振りか
ぶって攻めてくる、
ある意味崇高な哲学書でもある。各セクシ
ョンのテーマも詩的で、文章表現も美しい。
人気ミステリイ作家（大学の助教授でもあ

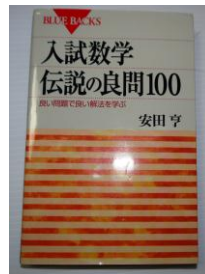
る）森博嗣氏の「笑わない数学者」にもエ
ピグラフとして引用されている。「数学の精
選話題」や「教授と学習」など興味をそそ
る話題も多い。

-
- 数学英和・和英辞典／小松勇作 編
（共立出版）



これは辞典であり、読
み物ではない。ただ、
授業の中で、「因数分解
は英語で何というのだ
ろう」、「なぜ円の半径
には r を使うのだろ
う」、「 ${}_nC_r$ はどのように読むのだら
う」という素朴な疑問に答えるために、机
上に置いておきたい本ではある。英語で
読むことによって、意味が見えてくるこ
ともある。

-
- 入試数学伝説の良問100 /安田亨
（BLUE BACKS）



単なる良問の紹介とそ
の解説書ではない。分数
関数の極値を求める「安
田の定理」、放物線とワ
イパー状に動く直線で
囲まれた図形を取り尽くす「安田の傾き積
分」など（知る人ぞ知る）アッと驚く解法
や、ペル方程式、ミニマックス原理など高
いところから入試問題を眺めるなど、入試
問題を通して数学の本質に迫ることができ
る感動の書である。この1冊をマスターす
れば、どんな進学校に行っても大丈夫？