

3 数学Ⅱに抜ける $(a+b)^3$ をめぐって 単元等 数学Ⅰ (旧) 数と式 (2項式の3乗)

◆Contents

- ・二項定理につながる展開
- ・展開を視覚に訴える教具

1 授業の内容

- (1) 2乗の展開の復習
- (2) 3乗の展開公式の説明
- (3) 3乗の展開公式を用いての問題演習

2 授業を見ての所感

■ 授業全体を通しての印象

まず、冒頭で本時は3乗の展開公式をマスターするという力を説かれました。「3乗の計算ができればそれだけで凄いことなんだぞ」と語りかけることで、生徒がこの時間に何を学ぶかしっかりと目標を持って臨むことができたのではないかと思います。

また、生徒がどのような場面つまずくかをしっかり把握されていて、随所につまずきへのフォローが見られました。そして、最後は、ほぼ全員がゴールでき、達成感を持ったのではないかと思います。

先生は、進学校での経験も豊富です。そのような学校にいて、往々にして、スピード中心の荒れた授業を行う「癖」がついてしまう先生が多いのも事実ではないかと思います。しかし、先生は、本校のような学力差のあるクラス集団の中においても、きちんと生徒に向き合いわかりやすい説明を行っていたことに、さすがと感心しました。

中学時代、数学で嫌な思いをしてきた生徒もたくさんいると思いますが、生徒たちは「わかりたい」「授業で納得したい」「置き去りにされたくない」という思いを強く持っているはずだ

と思います。そんな子供たちへの期待に応える授業だったのではないかと思います。

3 補足すること

私からは、授業技術や、授業に対しての注文ではなく、純粋に教材研究としていくつかの話題を提供したいと思います。ご参考にしていただければ幸いです。

■ 二項定理へつながる展開

先生の授業で $(a+b)^3$ の展開を行ったときの項の個数について、 $(a+b)(a+b)(a+b)$ というように3つの積の形に分解し、展開とは、それぞれのカッコから文字を1つずつ取り出して掛け合わせていくことだから、各項は3次であり、項の総数はそれぞれのカッコにある2つの文字から1つ選ぶ方法の数を考えて、 $2 \times 2 \times 2 = 8$ 個 となることを説明されました。

私もこの説明に大賛成です。将来の二項定理にもつながる話だと思います。

更に追加するならば、研究会でR先生からも話が出たように、係数 $(1, 3, 3, 1)$ についても言及してもよいかもしれません。

つまり、例えば a^2b の係数は、3つあるカッコのうち、2つから a を選べばよいのでその選び方は1番目と2番目、2番目と3番目、1番目と3番目を選ぶ3通りとなるのは当然だという感じですが、もちろんコンビネーションはまだ学んでいないのですが理解できるかと思っています。そうすると、各係数の和 $1+3+3+1$ が項の総数8になることも納得できます。

例えば、 $(2a+3b)^5$ の展開において、 a^3b^2 の係数を求めよなどという問題に対して、二項定理の公式 ${}_nC_r a^{n-r} b^r$ を持ち出して考えるより、

「5個のカッコから(2a)を3個、残りの2つのカッコから(3b)を2個取り出す」として、その言葉をそのまま式にすれば

${}_5C_3(2a)^3 \times {}_2C_2 \times (3b)^2$ となり、納得できるのではないかと思います。

更に、 $(2a+3b+c)^6$ における a^2bc^3 の係数を求める場合でも、わざわざ多項定理の公式を持ち出すまでもなく、

まず、6つのカッコから2つ(2a)を取り出し残り4つのカッコから1つ(3b)を取り出し、残りの3つのカッコから全部cを取り出すと、口ずさみながら

$${}_6C_3(2a)^2 \times {}_4C_1(3b) \times {}_3C_3c^3$$

とすればスイスイ解くことができますよね。

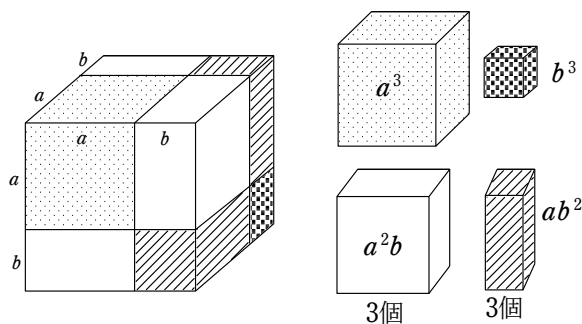
■ 視覚に訴える教具

先生や、R先生からも立体模型で

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

を示す話が出されました。

x^3 は英語ではx cubeと言うぐらいですから、下図の様な模型(キューブ)を見せるのもいいのではないかと思います。

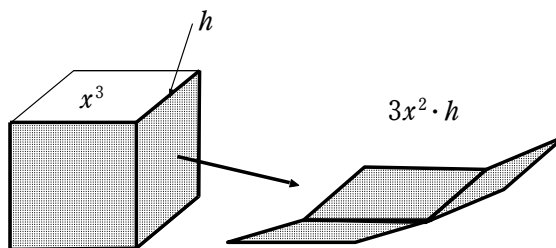


やはり板書ではイメージがわからないので実際に模型を作ってみるのがよいと思います。

また、このシェーマを、 x^3 の導関数の説明に利用することもできます。

各辺が一定の割合で膨張し続ける立方体の体積を x^3 として、辺の増分 h を限りなく0に近づけていくと、体積の微分商は $\frac{dV}{dx} = 3x^2$ となるこ

とが図からイメージできます。

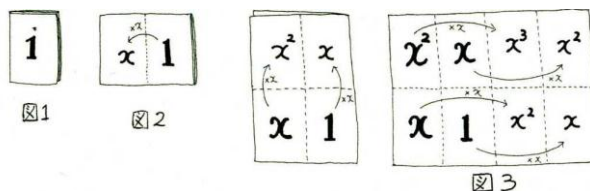


(なかなか授業で使うのは難しいと思いますが)

最後に、くだらない話を一つします。

$(1+x)^3$ の展開を、次のようにして説明します。

1枚の紙を3回たたみます(図1)。折りたたんだ面の1つに1とかきます。次に、この紙を1



度「展開」して図2のようにします。その開けた左の面に右の1にxをかけたもの、つまりxとかきます。次にもう1回「展開」します。そうすると、新しく2つの場所(セル)が現れます。その対応するセルにxをかけたものをかきます。これは何を表すかというと、

$$1+x+x+x^2 = (1+x)^2 \text{ ですね。}$$

ではまた「展開」して図3のようにします。これで $(1+x)^3$ ができあがりました。因みに4回折って展開すれば $(1+x)^4$ ができあがりますね。

$$\text{つまり、} f_{n+1} = f_n + x f_n = (1+x) f_n$$

という漸化式(パスカルの三角形の原理)を表しているわけですが、それよりも、紙を「展開」すれば式の「展開」が得られるというのが面白いところです。まあ、駄洒落なんですけれど。すみません。最後に余計な話をしました。

今回は授業ありがとうございました。今後のご活躍をお祈りいたします。