問題演習から授業力向上を目指す

学校教育室　下町壽男

「Meta-problem がわかることは
problem がわかること」

これは，数学者でエッセイストとしても著名な森毅先生（京都大学名誉教授）が，高校で入試問題を教える教師に向けて話した言葉です．

「Meta」は「超えた」とか「高次の」「～の後ろにある」などという意味を持ちます．

そこで私は，森先生のこの言葉を，「問題を高い視点で見たり，他との繋がりや，問題の背景を考えていくことにより，問題の理解が深くなる．そして，そのことによって授業力を高めていくことができる」と解釈してみたいと思います．

先日，初任者研修において，問題演習を行う上のポイントとして以下の７項目を提示しました．

- 問題を通して身につけさせたい事柄を示す
- 問題を読解し，解決へのビジョンを立てる　※
- 教師が一人で説明せず，生徒の考えを引き出す
- その問題の意味や，背景を示す
- 異なるアプローチを示すことで視野を広める
- モチベーションを高める導入や説明を工夫する
- 評価を行い，次の授業にフィードバックさせる

※解決へのビジョンを立てるための４つの推論

〇演繹的推論（deduction）
　正しい前提から出発し結論を見出す

〇帰納的推論（induction）
　いくつかの具体例から一般化を考える

〇仮説設定　（abduction）
　問題の状況から適合しそうな仮説を立てる

〇類推　　　（analogy）
　あることがらと似ている構造に注目する

そのような観点から，いくつかの問題を示しておきたいと思います．

【サンプル問題１】

放物線　$y=x^2-4x$ の $x=1$ における接線の方程式を求めよ.

いたって簡単な２次関数の接線の問題です．普通は以下のように解いてお終いということでしょう．

【解１】接線方程式の公式利用

$f'(x)=2x-4$ より，$f'(1)=-2$ …（接線の傾き）
また $f(1)=1-4=-3$ より　接点の座標は$(1, -3)$
よって求める接線の方程式は
$y-(-3)=-2(x-1)$
$\therefore y=-2x-1$ 答

ここでは，敢えてこの問題を様々な方法で解いてみます．そして，別の視点，より高い視点で問題を考えることで，数学の世界が広がり，認識・理解が深まっていくことを示したいと思います．

【解２】判別式の利用

求める接線は明らかにx軸に垂直ではないので
$y+3=m(x-1)$　とおける．　※
これと，$y=x^2-4x$ を連立させると
$x^2-(4+m)x+m-3=0$　※※
※※が重解を持てばよいので，$D=0$
$(4+m)^2-4m+12=0$
$m^2+4m+4=0$
$(m+2)^2=0$　よって $m=-2$
求める接線の方程式は※より
$y=-2x-1$ 答

参考

放物線と直線の位置関係は，D（判別式）を利用すれば，微分を使わず，代数方程式を解くことで接線の方程式を導いていくことができる．

【解３】1次近似Ｉ

組み立て除法により，$y=x^2-4x$ の右辺を $x-1$ で表す.

1	1	-4	0
		1	-3
	1	-3	$\boxed{-3}$
		1	
	1	$\boxed{-2}$	

$y=(x-1)^2-2(x-1)-3$

ここで，2次の項を０とみて，$x=1$ の近くでの y の1次近似を求めると.

$y=-2(x-1)-3$

$\therefore y=-2x-1$ 答

参考１

ポイントの一つは，y を $x-1$ でまとめ直す部分である．これは $x=1$ のまわりでのベキ展開であり，将来，テーラー展開に繋がるという重要な意味を持つ.

また，組み立て除法の繰り返しで簡単にまとめることができるのも覚えておきたい手法である.

例　$z^4=a(z-1)^4+b(z-1)^3+c(z-1)^2+d(z-1)+e$

が恒等式のとき a , b , c , d , e を決定せよ

解答

1	1	0	0	0	0
		1	1	1	1
	1	1	1	1	$\boxed{1}$
		1	2	3	
	1	2	3	$\boxed{4}$	
		1	3		
	1	3	$\boxed{6}$		
		1			
	1	$\boxed{4}$			

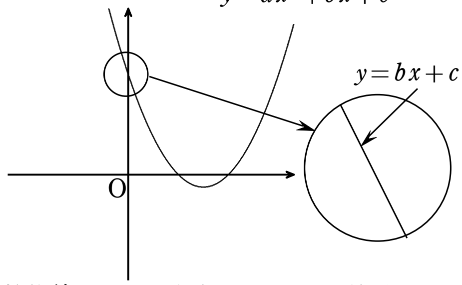
$z^4=(z-1)^4+4(z-1)^3+6(z-1)^2$
$\quad +4(z-1)+1$

より $a=1$, $b=4$, $c=6$, $d=4$, $e=1$

参考２

$x=1$ の近傍での一次近似は，2次の項 $(x-1)^2$ を落とす（０と見る）ことで得られる．厳密性には欠けるが，微分を指導する上でこのようなイメージを持つことは大切である.

例１



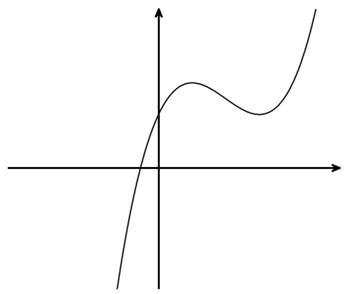
放物線が図のようなとき， b の符号を求めよ.

解答　$x=0$ における接線の方程式は

$y=bx+c$　であり，直線の傾きより

$b<0$ 答

例２



３次関数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ が図のようなとき，a , b ,c , d の符号を求めよ.

解答

グラフの形から $a>0$　切片から $d>0$

y を $x=0$ の近くで2次近似すると

$y=bx^2+cx+d$

グラフの形状から上に凸なので $b<0$

y を $x=0$ の近くで１次近似すると

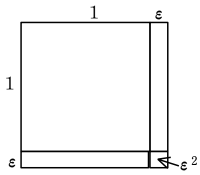
$y=cx+d$

傾きから　$c>0$

【解４】1次近似Ⅱ

$x=1+\varepsilon$ とおく．
$y=(1+\varepsilon)^2-4(1+\varepsilon)$
$y=-3-2\varepsilon+\varepsilon^2$
ここで，$\varepsilon\to0$ のとき，
ε^2 の項を落として　$y=-3-2\varepsilon$
$y=-3-2(x-1)$　　$y=-2x-1$ 答

参考



図において，$\varepsilon\to0$ のとき
ε^2は急速に０に近づくことがわかる．
微小部分をεとおいて，2次の項を落としながら
精度の良い近似計算を行うことができる．
ニュートンは以下のような手法を用いて，近似
計算を行った．

【$\sqrt{5}$ を求める】
$x^2=5$　である………※
$x=2$ とすると足りない　$x=3$とすると大きい
$x=2.2$ とすると，$x^2=4.84$ でおしい！
そこで，$x=2.2+\varepsilon$ とする．（ε は0.1よりも小さい）
これを※に代入すると　$4.84+4.4\varepsilon+\varepsilon^2=5$
$4.4\varepsilon+\varepsilon^2=0.16$　………※※
ここで大胆なことをする．
ε は０に近い数なので，ε^2 はもっともっと０に
近いはずだ．そこで思い切って$\varepsilon^2=0$ としてみる．
すると※※より　$\varepsilon=\dfrac{0.16}{4.4}=0.03636\cdots$
つまり，$x=2.2+0.03636\cdots=2.23636\cdots$ とできた．
そこで今度はあらためて
$x=2.236+\varepsilon$　とおく（εは0.001より小さい）
これを先ほどと同じように※に代入すると．
$2.236^2+4.472\varepsilon+\varepsilon^2=5$
ここでε^2 はもっともっともっともっと０に近いはずなので
$\varepsilon^2=0$ として解くと，$\varepsilon=0.0000679785\cdots$
よって，$x=2.2360679785\cdots$　となる．
このような操作を続けていけば相当いい近似が得られ，
誤差の範囲もわかる．

【解５】差の関数

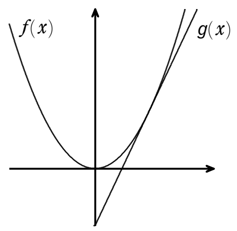
求める接線の方程式は
$y=x^2-4x-(x-1)^2$
$y=-2x-1$　答

参考

差の式の意味が理解できていれば，
これが最も早い方法であろう．
例えば，
$y=2x^2-3x+1$ の$x=2$ における接線の
方程式であれば
$y=2x^2-3x+1-2(x-2)^2$ とすればよいし
$y=-3x^2+x-3$の$x=1$ における接線の
方程式であれば
$y=-3x^2+x-3+3(x-1)^2$　でよい．
つまり，2次関数$y=ax^2+bx+c$ の
$x=\alpha$ における接線の方程式は
$y=ax^2+bx+c-a(x-\alpha)^2$　である．

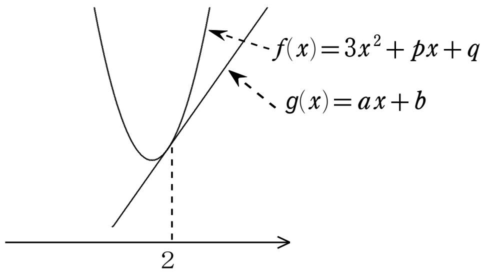
この考え方を生徒が理解すると，定積分
の定着が飛躍的に進歩すると思われる．
以下に，教師と生徒の会話による説明を示す．

T：$f(x)=x^2$ と $g(x)=2x-1$の交点の座標を
求めてごらん．



S：$f(x)=g(x)$　とします．
ここで，$g(x)$ を左辺に移行して
$x^2-2x+1=0$
T：待った！
$g(x)$ を左辺に移行すると，
$f(x)-g(x)=0$　となるよね．
この式の左辺は，$f(x)$と$g(x)$ の差の関数
であることに注意して下さい．
S：では，続きをやります．
$x^2-2x+1=0$
$(x-1)^2=0$ なので $x=1$ （重解）
重解なので，交点（接点）は$(1,1)$です．

T：では次の問題



図のようなとき，$f(x)-g(x)$ を求めなさい．

S：$f(x)$ も $g(x)$ も不明なので，$f(x)-g(x)$ は求められません．

T：何いってるんだい．さっきの問題を思い出してごらん．

S：$x=2$ で接しているところを鍵にすればいいのか．つまり，$f(x)=g(x)$ を解くと $x=2$ の重解が出る．そうか！

$f(x)-g(x)=0$ は　$(x-2)^2=0$ とできるんだ　わかりました．

$f(x)-g(x)=(x-2)^2$ ですね．

T：残念！　$f(x)$ の x^2 の係数を見てごらん．

S：３ですね．

T：そう．だから，

$$f(x)-g(x)=3x^2+(p-a)x+q-b$$

という形にならなければいけない．

S：なるほど．この両方を満たす形は

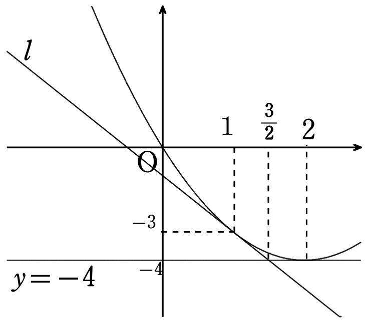
$f(x)-g(x)=3(x-2)^2$ ですね．

T：その通り．ここで，$g(x)$ は $x=2$ における $y=f(x)$ の接線の方程式ですね．

そこで，$g(x)=f(x)-3(x-2)^2$ と書くこともできます．これで接線の方程式を導く式を手に入れました．

【解６】放物線と２接線の性質の利用

$y=(x-2)^2-4$



２つの接線 l と $y=-4$ の交点の x 座標は，２つの接点の x 座標の中点である．よって，l は

$(1，-3)，\left(\dfrac{3}{2}，-4\right)$ を通る．

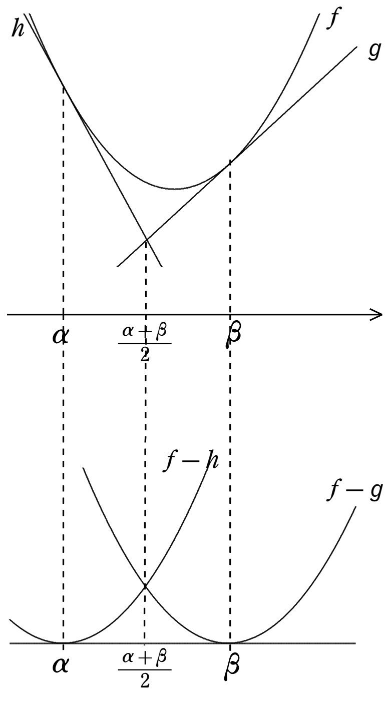
$\therefore\ y+3=\dfrac{-1}{\frac{1}{2}}(x-1)$　　$y=-2x-1$ 答

参考

2次関数と2つの接線について

２つの接線の交点の x 座標は

２つの接点の x 座標の中点である．



$f(x)=ax^2+bx+c$ として，差の式を考えると　$f-g=a(x-\beta)^2$

$f-h=a(x-\alpha)^2$　となるので

２つの接線の交点は，接点の x 座標の中点であることがわかる．

【解７】ダイレクトな一次近似

$y=x^2-4x$　より

$$\frac{y+y}{2}=x\times x-2(x+x)$$

よって $(1,-3)$ における接線は

$$\frac{y-3}{2}=x\times 1-2(x+1)$$

$\therefore y=-2x-1$　答

参考

円の接線の方程式のアナロジーである．

$$\frac{y+y}{2}=x\times x-2(x+x)\quad ※$$

において，※上の点を (x_1, y_1) とすると

$$\frac{y+y_1}{2}=x\times x_1-2(x+x_1)\quad ※※$$

※※は次の性質を持つ

①　(x_1, y_1) を通る直線である

②　(x_1, y_1) に近い点に対して，$y=x^2-4x$ とほぼ同じふるまいをする
（$y=x^2-4x$ に代入したものとほぼ同じ式だから）

①②より※は (x_1, y_1) における接線を表す．

かなりマニアックな手法だが，円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 (x_1, y_1) における接線の方程式 $x_1x+y_1y=r^2$ の補足説明に触れてみてもいいし，陰関数で表される関数など，特に数学C（次年度からは数学Ⅲ）の二次曲線の接線に応用してみる手もある．

例１

$y^2=4x$ の $(1, 2)$ における接線の方程式を求めよ．

解答

$yy=2x+2x$　とすると接線の方程式は

$2y=2x+2$　よって $y=x+1$　答

例２

$y=x^3-3x$ の $(2, 2)$ における接線の方程式を求めよ．

$$\frac{y+y+y}{3}=xxx-(x+x+x)$$　として

接線は　$\dfrac{y+2+2}{3}=4x-x-4$　$\therefore y=9x-16$　答

【サンプル問題２】

図のように，直線 l 上にない点A，$AH\perp l$　となる l 上の点をH，線分AH上の点Bをとる．点Pは直線 l 上を点Hから左へ動くものとする．
$AH=a$，$BH=b$ $(a>b>0)$，$PH=x$ $(x>0)$，$\angle APB=\theta$
とおくとき次の問いに答えよ．

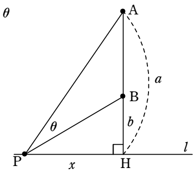
(1)　$\tan\theta$ を a, b, x を用いて表せ．

(2)　θ が最大となる x を a, b を用いて表せ．

ただし，正の数 p, q に対して，

$\dfrac{p+q}{2}\geqq\sqrt{pq}$　（等号成立は $p=q$ のときに限る）

が成り立つことを用いてよい．　(2002宮崎大)



この問題は，実際の授業の実況風に解説してみます．冒頭に述べた７項目のポイントを想起しながら，自分ならどのように進めるかイメージして欲しいと思います．

Ｔ：この問題を通して強調しておきたいこと，皆に確実に理解して欲しいことが３つあります．
一つ目はこれです．（板書）

タンジェントの加法定理

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

Ｔ：次はこれです（板書）

$a>0, b>0$ のとき　$\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$

ただし等号成立は $a=b$ のときに限る

これを何といいましたか．

Ｓ：相加平均･相乗平均の不等式です．

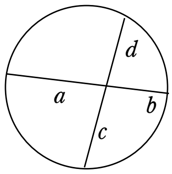
Ｔ：そうです．最後の「ただし～」の部分は重要です
この不等式が何故いろいろな場面で重宝されるのかというと，最後の部分があるからです．
つまり　最小値が保証されているということです．

Ｓ：それはどういうことですか．

Ｔ：じゃあ，今私が皆さんに質問します
「身長が１ｍ以上の人は手をあげて下さい」
（全員手が上がる）
ということは，皆さんの身長を y_n とすると
$y_n\geqq 1$　という不等式が得られます．
これは正しい不等式ですね．
ところが，じゃあ最小値は１ｍといっていいですか．手をあげてみて．（誰もいない）
$y_n\geqq 1$ は正しい不等式だけれど，
等号が成立しないということです．
ですから，等号成立が確実に成り立つ不等式は，最大最小問題に利用できる非常に便利な不等式というわけです．

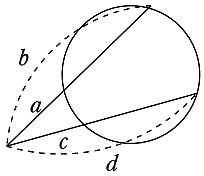
T：3つ目は，方べきの定理です．方べきの定理には３つの使い方がありました．（板書）

＜第一用法＞



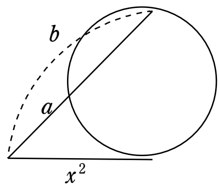
$ab=cd$

＜第二用法＞



$ab=cd$

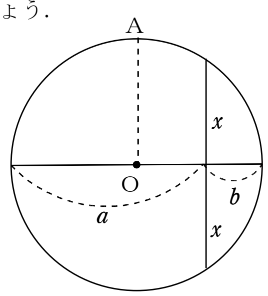
＜第三用法＞



$ab=x^2$

T：第一用法～第三用法という言葉は私の造語で，ここだけのローカルな決め方ですので気をつけて下さい．

T：実は，方べきの定理を使うと，相加相乗平均の不等式を納得することができます．では，問題に行く前にその説明をしましょう．



直径が$a+b$であるような円を描きます．すると図から何がいえるでしょう．

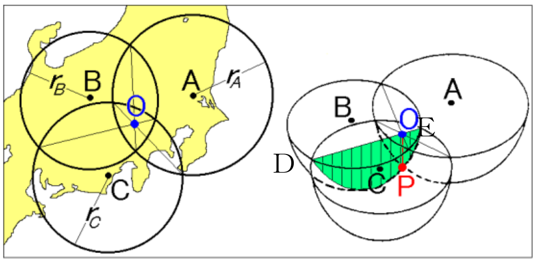
S：方べきの定理＜第一用法＞の形ですね．

$x^2=ab$

つまり，$x=\sqrt{ab}$　ということですね．

T：そうです．ちなみに$b=1$とすれば$x=\sqrt{a}$なので，これは$\sqrt{a}$の作図法ともいえます．

また，この方法によって，地震の震源の深さを知ることもできます．



T：図を見て下さい（プロジェクタで表示）

3地点で震源までの距離を測定したとします．これは初期微動継続時間で求めるのが古典的方法です．

ここで，3つの球はただ1点で交わるのでその交点が震源地です．

左図で，まず震源地の真上（震央）を求めます．3つの円が交わるとき，各共通弦は1点で交わります．それは方べきの定理で証明できます（省略）．

さて，右図を見て下さい．震源の深さOPは，方べきの定理から求められる形になっていることがわかりますね．

S：$OP^2=OD\cdot OE$　ですね．

T：先ほどの図にもどりましょう．

$x=\sqrt{ab}$ だったから，xはa，bの相乗平均ですね．ところで，OAの長さは何でしょう．

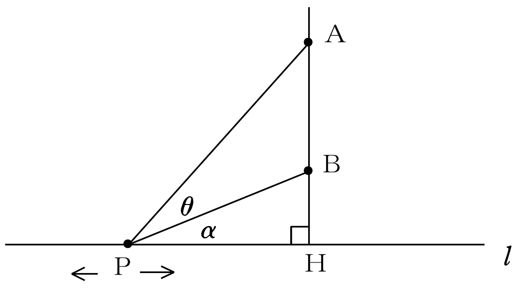
S：円の半径なので$\dfrac{a+b}{2}$　そうか！

相加平均だ．

T：そうですね．xとOAが一致するのは？

S：$a=b$のときに限るのがわかります．

T：では，方べきの定理と相加相乗平均がつながったところで，本問を解いていきましょう．



Ｔ：では，あらためて問題を見てみよう．
　Ｐが直線 l 上を動くとき，
「ABを見込む角」の最大値を求める問題ですね．この問題を見て何か思うところはないかい．

Ｓ：先生．これはラグビーの問題です！
Ａ，Ｂがポールで，AHがゴールラインです．l 上のある地点でトライした時，トライ後のキックは直線 l 上の好きなところから蹴ることができます．

Ｔ：そうです．できるだけABに近づこうとすると見込む角が小さくなるので，どの地点が一番ABを見込む角が大きくなるかということですね．どうですか，そう考えると問題を解いてみようという気になりませんか．
では，$\angle BPH=\alpha$ とおいて，
$\tan(\theta+\alpha)$を計算してみよう．

解答(1)

$\angle BPH=\alpha$ とおくと

$$\tan\alpha=\frac{b}{x}\,,\ \tan(\theta+\alpha)=\frac{a}{x}$$

$$\tan(\theta+\alpha)=\frac{\tan\theta+\tan\alpha}{1-\tan\theta\tan\alpha} \quad より$$

$$\frac{a}{x}=\frac{\tan\theta+\dfrac{b}{x}}{1-\tan\theta\cdot\dfrac{b}{x}} \qquad \therefore\ \frac{a}{x}=\frac{b+x\tan\theta}{x-b\tan\theta}$$

分母を払って

$$a(x-b\tan\theta)=x(b+x\tan\theta)$$

$$(x^2+ab)\tan\theta=x(b+x\tan\theta)$$

よって $\tan\theta=\dfrac{(a-b)x}{x^2+ab}$ 　答

Ｓ：(2)はθの最大値ですから(1)を使えばいいですね．
θが最大ということは，$\tan\theta$が最大ということ．つまり，$\dfrac{(a-b)x}{x^2+ab}$ の最大値を求めればいいわけですね．
どうすればいいのだろう．

Ｔ：$f(x)=\dfrac{(a-b)x}{x^2+ab}$ として $f(x)$ の最大値を考えるのは，数Ⅲの問題になってしまいます．そこで，登場するのが相加相乗平均です．

解答(2)

$$\tan\theta=\frac{a-b}{x+\dfrac{ab}{x}} \qquad ※$$

$y=\tan\theta$ は$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$で単調増加なので
θが最大になるのは$\tan\theta$が最大のときである．
今，※において$a>b$ より $\tan\theta>0$
よって，※の分母が最小になればよい．

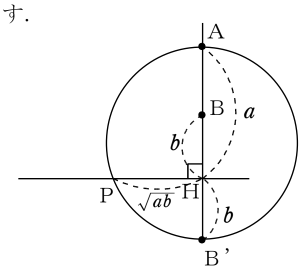
※の分母$=x+\dfrac{ab}{x}$

$x>0\,,\ \dfrac{ab}{x}>0$ なので相加相乗平均の不等式を用いると，$x+\dfrac{ab}{x}\geqq 2\sqrt{ab}$ 　よって
分母が最小となるのは，上の不等式で等号が成立するときなので

$x=\dfrac{ab}{x}$ 　$\therefore x^2=ab$ 　よって$x=\sqrt{ab}$ 　答

Ｔ：ポイントは※式で，分母から x を追い出すところと，分子の「正の数の逆数関係」に着目して相加相乗平均を使うところですね．
さて，ここで求めた$\sqrt{ab}$ は$a\,,b$ の相乗平均です．さて，Pの位置はどのように作図すればいいでしょうか．

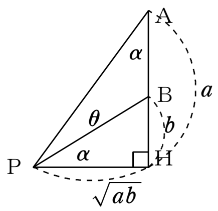
Ｓ：最初にやった方べきの定理を使えば図のようにB'をとってAB'を直径とする円と l の交点をP とすればθ が最大になります．



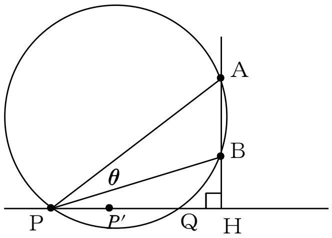
Ｔ：そうですね．あるいは，

$$\tan(\theta+\alpha)=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \qquad \tan\alpha=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$$

だから△ＰＢＨ∽△ＡＰＨとなることがわかります．これからＰのおおよその場所を見当をつけることもできそうです．

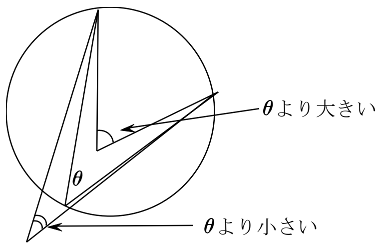


T：最後に別のアプローチを行ってみます．
　パソコンで説明します．
（シンデレラというソフトを利用）



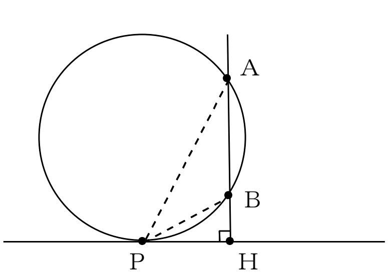
3点A , B , P を通る円を描いてみましょう．
（上図）
図のような時$\boldsymbol{\theta}$は最大でしょうか．
もし図のＰとＱ間のl の下側に円がある
ところにP' があったとすると
$\angle AP'B > \theta$　となります．
なぜでしょうか．

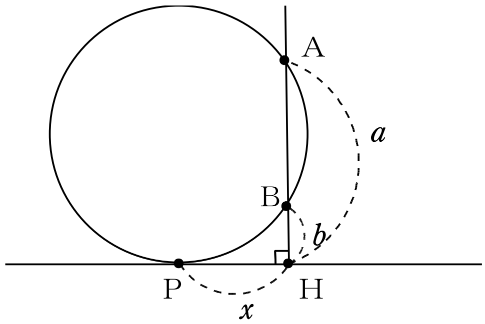
S：円周角の関係ですね．



T：ではどこにＰがあれば$\boldsymbol{\theta}$が最大になる
　だろう．

S：そうか．円が直線l の下にはみ出してい
　なければいいんですね．
　つまりA , B を通る円が l に接している
　とき$\boldsymbol{\theta}$は最大になります．





T：さあ，するともうひと踏ん張りです．
　図から何かが見えてこないかい．

S：方べきの定理<第三用法>の図ですね．
　つまり　$x^2 = ab$
　なるほど繋がりました．$x = \sqrt{ab}$ と
　なっています．
　これで考えれば，タンジェントの加法
　定理まで考えることなく求められたん
　ですね．

終

■　この問題演習を通して伝えたかったこと

①タンジェントの加法定理について
・必ず覚える．
・タンジェントとは傾きである
②相加相乗平均について
・なぜ最大最小問題にこれが使われるか
・方べきの定理と相加相乗平均の不等式の関係
・正の数の逆数関係に注目する
③方べきの定理について
・図の形から３用法に結び付ける
・地震の震源地など日常に役立っていること
・$\sqrt{a}$ の作図に応用できる
④最大最小に関わって
・タンジェントの単調性に着目する
・文字の場所を少なくする工夫
⑥その他
・問題に与えられているヒントから推論する
・ＰＣを用いてイメージ化を図る
・問題の背景を示し，意欲を高める

2011/07/08　simon@mvh.biglobe.ne.jp