

## 授業実践例⑥ 三角形の性質（数学 A・図形の性質）

平成 26 年 10 月 9 日（木）に、宮城県仙台第二高等学校よりオファーを受けて行った授業である。

### 1 単元についての教材観及び指導の構想

#### 【数学を学ぶ目的・数学とは何か】

数学とは何か、数学を学ぶ目的は何か、という問いに対する答えは幾とおりも存在するだろうが、その一つとして、

#### 「数学は世界を解明するためにある」

という捉え方もある。解明するといっても、それは自分一人が納得するのではなく、万人に対して、論理的に説明できるということである。

つまり、数学は、世界を解明するための一つの言語という側面を持つ。では、具体的に、その言語とは何か。

一つは「数」であり、そしてもう一つは「形」である。数（と式）の性質と、形（と図形）の性質を用いながら、様々な現象や不思議を解明していくことが数学をするということではないだろうか。

本時は、「形」の基本と言える三角形の性質を学ぶ。このステップを経て、我々は図形を用いて数学的に正しい推論、論証を行う手法を学んでいく。

そして、その中で、生徒に数学的な見方・考え方を身につけさせるとともに、数学の構造的な美しさを示し、数学への興味関心を喚起させたいところである。

#### 【数学 I で扱う三角形との比較】

この単元で扱う三角形の性質とは、数学 I の三角比のように、「辺の長さ」「角の大きさ」「面積」といった、図形の計量を行うのではなく、線分の内分・外分、平行線の性質など、ユークリッドの原論に端を発する初等幾何的な事柄についての内容が中心である。

特に本時は、線分比や、点・線分の結合関係など、三角形の形状によらず不変なものを取り上げる。数学 B で習うベクトルと対比させると、ここで扱う図形はベクトル空間上の性質に繋がるものであり、一方、数学 I で扱う三角形の性質は線形計量空間（内積空間）上で議論される内容である。従って、数学 I と数学 A の両者を合併してベクトルの学びに向かうことを意識して指導を行う必要がある。

#### 【すべての三角形はアフィン合同である】

任意の 2 つの平行四辺形は、アフィン変換（1 次変換と平行移動）によって重なる。従って、任意の三角形もアフィン変換によって 1 つの三角形に収斂される。

これは非常に重要な性質である。アフィン変換、つまり相似拡大や、射影に対して比は保存される。すると、三角形の比や平行線に関する問題で、辺や角の大きさが絡んでいない限り、ある一つの三角形で示せば、すべての三角形で示されたということになる。

本時はこの点に留意して、一様に伸縮する輪ゴムを教具として用いて授業を行いたい。

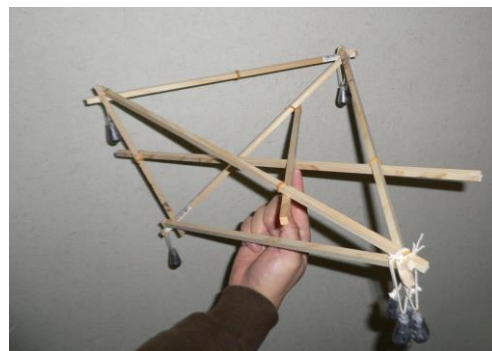
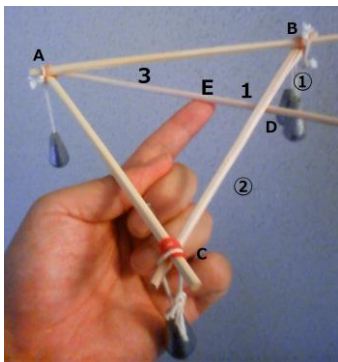
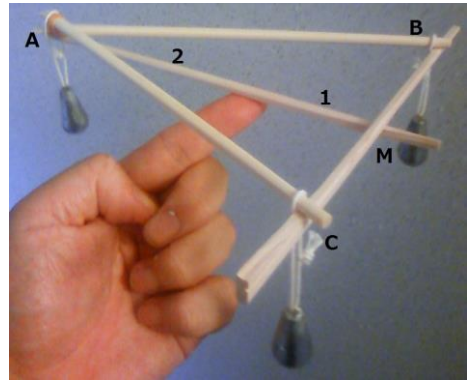
### 【三角形の重心の性質を演示によって理解する】

本時では、三角形の重心（時間があれば外心と内心）の性質にも触れる。ここでは、三角形の各頂点に一樣な錘を分布させた場合の質点重心を考えることで、重心が各中線を2：1に分ける点であることを納得させたい（右写真）。

本来ならば、各グループで実験を行うところであるが、準備の都合や、時間の関係で今回は割愛する。

また、質点の重みを変えたとき、釣合いの位置がどう変化するかを考えることで、後日学ぶメネラウスの定理を展望する活動になる。

更に発展して考えると、空間における四面体の線分比への応用にも広がっていく。このような考えに及ぶ生徒が出れば面白い。



### 【外心・内心について】

時間があれば、外心及び内心について、ポロノイの図からアプローチしてみたい。ポロノイ図とは、平面上の任意の位置に、いくつかの点（母点という）を取り、同一平面上の他の点がどの母点に近いかによって領域分けされた図のことである。

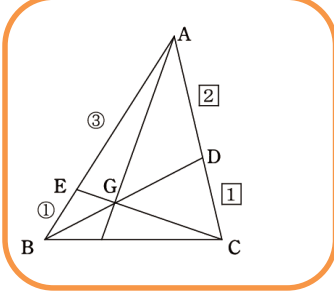
ポロノイの図は、動物の縄張りなどの生態系の問題や、PHP 基地局の配置問題、その他にも画像データ圧縮や有限要素法などその応用範囲は広い。その主張は高校生にもわかりやすく、いろいろな応用を考えることができるので、さわりの部分だけではあるが、その内容を紹介することで、将来深く研究したいと思う生徒が出てくれば嬉しい。

また、内心については、バスケットボールのディフェンスの視点からその性質を述べることもできるので、ポロノイの図と併せて説明したい。

## 2 本時の目標（評価規準）

- (1) 比が射影や相似拡大で保存されることを示し、分点の位置を様々な方法で求める。
- (2) 三角形の重心の性質を理解し、その考え方を発展させ、三角形の様々な線分比を求める。
- (3) 内心・外心に親しみを持たせ、数学への興味関心、意欲の向上を図る。

### 3 本時の展開案

	学習内容及び学習活動	指導上の留意点
導入 15分	<p>1 本時の学習課題の提示</p> <div style="border: 1px solid orange; padding: 5px;"> <p>① 分点の位置の求め方を考え、線分の比の性質を理解する。            ② 重心の性質を理解し、それを応用して線分比を求める。            &lt;オマケ&gt;            ③ 外心と内心の意味を理解する。</p> </div>	<p>■ クラスを4～5人のグループに分ける</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>冒頭に、数学を学ぶ目的について班で議論する。</li> <li>数学は「数」と「形」の性質を用いて、世界を解明することであることを提示</li> </ul>
	<p>2 グループ課題「A4用紙を3等分するにはどうするか」</p> <div style="border: 1px solid orange; padding: 5px;"> <p>&lt;教師の側で用意する4つの方法&gt;            ① 相似三角形を利用する方法            ② 射影を利用する方法            ③ A4用紙の特性を利用する方法(三角比)            ④ 錘の釣合いを考える方法(棒の3等分)</p> </div>	<ul style="list-style-type: none"> <li>どんな方法でも良いからA4の紙を3等分する方法を考える。</li> <li>いくつかのグループから発表させる。</li> </ul>
展開 25分	<p>1 比の性質の説明</p> <p>(1) 内分・外分の定義            (2) 比は相似変換によって不変である            (3) 比は射影によって不変である</p>	<p>(1) 板書する            (2) (3) 方法①②と関連させて説明。            輪ゴム(ザビエルのゴム)によって納得させる。</p>
	<p>2 三角形と線分比</p> <p>(1) 任意の2つの三角形はアフィン合同である            (2) 重心の作図            (3) 錘を使って重心の性質を示す</p>	<p>(1) 格子平面の教具を用いてイメージする            (2) ザビエルのゴムを用いる            (3) 三角形の質点重心を求める演示</p>
	<p>3 様々な分点の位置を重み付重心の性質用いて求める</p> <div style="border: 1px solid orange; padding: 5px;">  </div> <p>※ 問題の一例</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>グループ内で教えあいながら演習する。</li> <li>発展的な問題も用意しておく</li> <li>比は三角形の形状に依存しないことを確認</li> </ul>
	<p>4 外心と内心の意味を理解する</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>ポロノイの図の考えから外心と内心を説明する</li> <li>バスケットボールのディフェンスと内心の関係も説明</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>教師の説明中心</li> <li>時間がなければ割愛</li> </ul>
まとめ 5分	<p>■ 本時の学習のまとめ</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>本時の学習内容をグループ内で議論</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>発表者をグループ内で決定し発表させる</li> </ul>