

授業実践例② 合同式 (数学 A・整数)

アクティブ・ラーニング型授業のオファーを受けて行った授業。対象生徒は、難関大を中心に大学進学を目指す高校2年生の理系クラスである。生徒をアクティブにするためのいくつかのポイントを以下にまとめる。

1 授業ポリシー

「合同式」は教科書では整数の単元の発展教材に分類されるが、この式を使いこなすことによって、多くの問題を容易に解くことができるようになる。このような、問題解法のスペシャルな技法の習得により、ある意味、数学の良さを生徒に実感させるとともに、合同式を学ぶ過程で、同値関係や同値類の考え方など、数学に向き合うための本質的な考え方を育てることも目指す。

本時の学習テーマを次のように設定し、生徒に示す。

【学習テーマ】「合同式と友達になろう！」

- 自然な考えから「和の余りは余りの和」「積の余りは余りの積」を納得し合同式の理解につなげる。
- 合同式の性質を用いて不定方程式、剰余の問題を解決する。

また、授業の冒頭に、本時で学ぶ「合同式」が、今後どのように応用され、大学まで繋がっていくかについて、下のような俯瞰図によって示す。



具体的な授業の目標は次の3点にまとめる。

- ① 合同式の記号「 \equiv 」は、等号「 $=$ 」と「ほぼ同じように」扱えることを実感すること。
(同値関係の捉え方)
- ② 「和の余りは余りの和」「積の余りは余りの積」「べきの余りは余りのべき」に自然に気づくこと。
(同型の考え方)
- ③ 最終的に以下のようなタイプの問題が解けるようになること。(問題を解く技能)

■ Chapter 1 ウォーミングアップ問題


- (1) 7777710 を7で割った余りを求めよ。また 77777723 を7で割った余りを求めよ。
- (2) $A=7777710$, $B=77777723$ とすると、 $2A+B+AB$ を7で割った余りはどうなるだろうか。
グループで考えてみよう。
- (3) x の整式 $f(x)$ を $x-1$ で割った余りが4、を x^2+x+1 で割った余りが x である。
このとき、 $f(x)$ を x^3-1 で割った余りを求めよ。

■ Chapter 2 挑戦問題

【べき乗の余りの問題】

- (1) 23^{2016} を7で割ったときの余りを求めよ。★
- (2) $10^{100} + 11^{100}$ を7で割ったときの余りを求めよ。★★
- (3) 整数 a, b, c に対して $a^2 + b^2 - 6ab = c^2$ が成り立つとき、 a, b の少なくとも一方は3の倍数であることを示せ。★★★

【不定方程式】 ★★

- (1) よしひろさんは、1個 300 円のケーキと、1個 350 円のケーキを合わせて  個買い、3300 円はらいました。300 円のケーキと 350 円のケーキをそれぞれ何個買ったのでしょうか(どちらも少なくとも1個は買っています)。
(「東京書籍 中学数学2年」の問題より一部改題)
- (2) 不定方程式 $92x + 197y = 1$ を満たす整数 x, y の組の中で x の絶対値が最小のものを求めよ。
(2016 センター試験)

※ 不定方程式(ベズーの等式)の問題は後でユークリッドの互除法を学んだあとに出てきます。ここでは、合同式を用いて解く手法を考えます。

2 授業の展開

アイスブレイク→ウォーミングアップ問題→合同式の定義・性質→グループによる問題解決→まとめ、という流れで進める。以下に指導案を示す。この指導案は、アクティブ・ラーニング型の授業に対応したもので、数学の指導内容と、生徒をアクティブに動かすための留意事項を平行に示したものである。

指導案ファイル

3 評価

授業後に次のような授業アンケートにより、態度評価と、授業評価を行う。

授業アンケート

今日の授業について、①～④のいずれかに○をつけて答えて下さい。

- ①よくあてはまる
- ②まああてはまる
- ③あまり当てはまらない
- ④全くあてはまらない

- 【質問1】 今回の授業は面白かった (① ② ③ ④)
- 【質問2】 自分の今後に役に立つ内容だった (① ② ③ ④)
- 【質問3】 理解できる内容だった (① ② ③ ④)
- 【質問4】 達成感が得られ満足である (① ② ③ ④)

以下のような、○×の簡単なクイズを授業後に行う。計算技能や知識だけではなく、概念についてのイメージや、この単元で伝えたいメッセージなども盛り込んでいるところがポイントである(傍線部分)。これは、学びに向かう力を評価するという意味と、このような問を作るために教師が教材研究を深め、授業内容を充実させることを目的としている。

クイズ

次にあげる文の内容が正しいと思うときは○、間違っていると思うときは×をつけて下さい。

- [1] 合同式は「和の余りは余りの和」「積の余りは余りの積」とイメージできる。 ()
- [2] $27 \equiv 6 \pmod{7}$ とは「27を7で割ると余りが6」という意味である。 ()
- [3] $27 \equiv 6 \pmod{7}$ は「27は7を法として6と合同」という言い方をする。 ()
- [4] p が素数の時、 ${}_pC_r$ は $1 \leq r < p$ のときすべて p の倍数である。 ()
- [5] 合同式はRSA公開鍵暗号の開発に貢献している。 ()
- [6] 合同式「 \equiv 」は「 $=$ 」と同じ同値関係で、「 $=$ 」の場合とほぼ同様の操作が行える。 ()
- [7] 平方数を3または4で割ると、余りは0か1しかありえない。 ()
- [8] 不定方程式(ベズーの等式)は合同式を使って解くことができる。 ()
- [9] 今日が金曜日だとすると100日後は日曜日である。 ()
- [10] 12345678914の3乗を9で割った余りは8である。 ()



ご協力ありがとうございました。

4 授業の振り返りより

以下に、授業を終えて記した振り返りコメントから特にアイスブレイクの部分を中心に紹介する。

【アイスブレイク① グループづくり】

30秒で3人一組のグループを作ります。20人くらいの参観者がいらっしやったので、彼らも入ってもらいました。つまり総勢60人程度での活動です。



グループを作ったらその場にしゃがんでもらいます。早くチームを作ることを競うゲームです。すると、グループを作れない人が2人いました。今度は、現在のメンバーとは違うメンバーで4人グループを作ってもらいます。すると、今度は3人余りました。

この活動を通して、授業とは教科の内容を学ぶだけではなく、人間関係を作る場であることを生徒に伝えるのですが、実は、本当の狙いは、合同式に繋げるための間を立てることにあります。教室の中にいる人間の数を n とすると、3人組が何組かできて2人余ったことと、4人組が何組かできて3人余ったことから、このような式に表せます。

$$\begin{cases} n = 3k + 2 \dots \textcircled{1} \\ n = 4l + 3 \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

ここで、生徒のくいつきがよかったので、この段階で、もう合同式を定義することにしました。

$$\begin{cases} n \equiv 2 \pmod{3} \dots \textcircled{1}' \\ n \equiv 3 \pmod{4} \dots \textcircled{2}' \end{cases}$$

この式を使って、余りについての様々な計算を行うことが今日のテーマであることを示します。

このような合同式を自由に使いこなせるようになることが本時のゴールの一つでした。

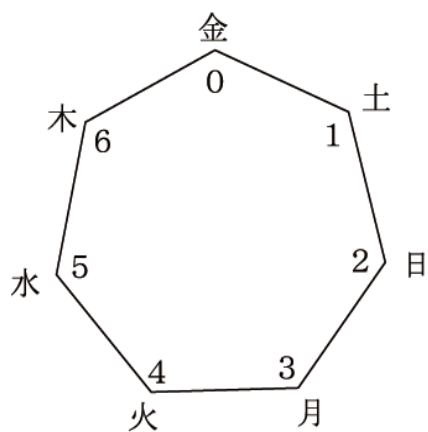
【アイスブレイク② 曜日当て】

「今日は金曜日ですね。では（ ）日後は何曜日でしょう」というクイズを出します。

「明日は何曜日?」「3日後は何曜日?」これはグループで話し合うまでもなく、すぐに手が上がります。では、「100日後は何曜日?」これは少し時間がかかりました。でも数人の生徒がすぐに手をあげます。じゃあということで、次の問題を出しグループで話し合ってもらいます。

- 1000日後は何曜日
- 10日前は何曜日
- 100日前は何曜日
- 8の10乗日後は何曜日

考えている間に次のようなヒントの図を板書します。



大切なことは、グループの全員が理解することです。グループ活動の様子を見ながら行う私のアドバイスは「グループ全員がわかるように」のみです。

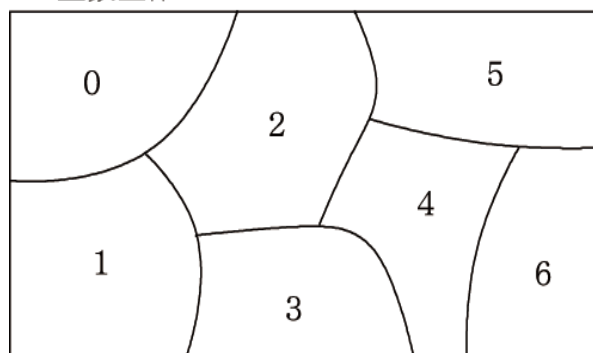
生徒からは、「100の代わりに100を7で割った余りの2で考えればよい」「10日前は-10日後と考え、-10に7を2回足すと4なので『10日前』は『4日後』と考えればよい」「100日前は10日前の10倍だから、『4日後の10倍』→『40日後』→『5日後』と考える」「8日後は1日後と同じ、それを10乗して『1日後』とする」「 $8 = (7+1)$ だから、 $(7+1)$ の10乗は結局『 $(7$ の倍数たち) $+1$ 』となる」などの説明が出されました。

剰余類を説明するため、次の様な図を板書します。整数全体の世界を図の様に7つの部屋に分けて0から6までの数で考えているということです。0~6は6つの村を代表する代議員というカンジですね。例えば「1」の部屋には、8や15や、-6などがあります。これを合同式の記号を使うと

$1 \equiv 8 \equiv 15 \equiv -6 \equiv \dots$ ということです。

このアイスブレイクの時間に、掴んで欲しかったことがほぼ達成されました。

整数全体



まとめとして、生徒全員で次のフレーズを合唱して本題に入っていくことにしました。

「和の余りは余りの和」「積の余りは余りの積」「べきの余りは余りのべき」

以下次のウォーミングアップ、そして目標のチャレンジ問題に進みます。グループ内解決、ワールドカフェ方式で、グループを超えてのシェアと進みました。チャレンジ問題ではかなり難しい問題も入れていたのですが、終業のチャイムが鳴っても問題を解き続ける生徒達の姿に感心しました。

